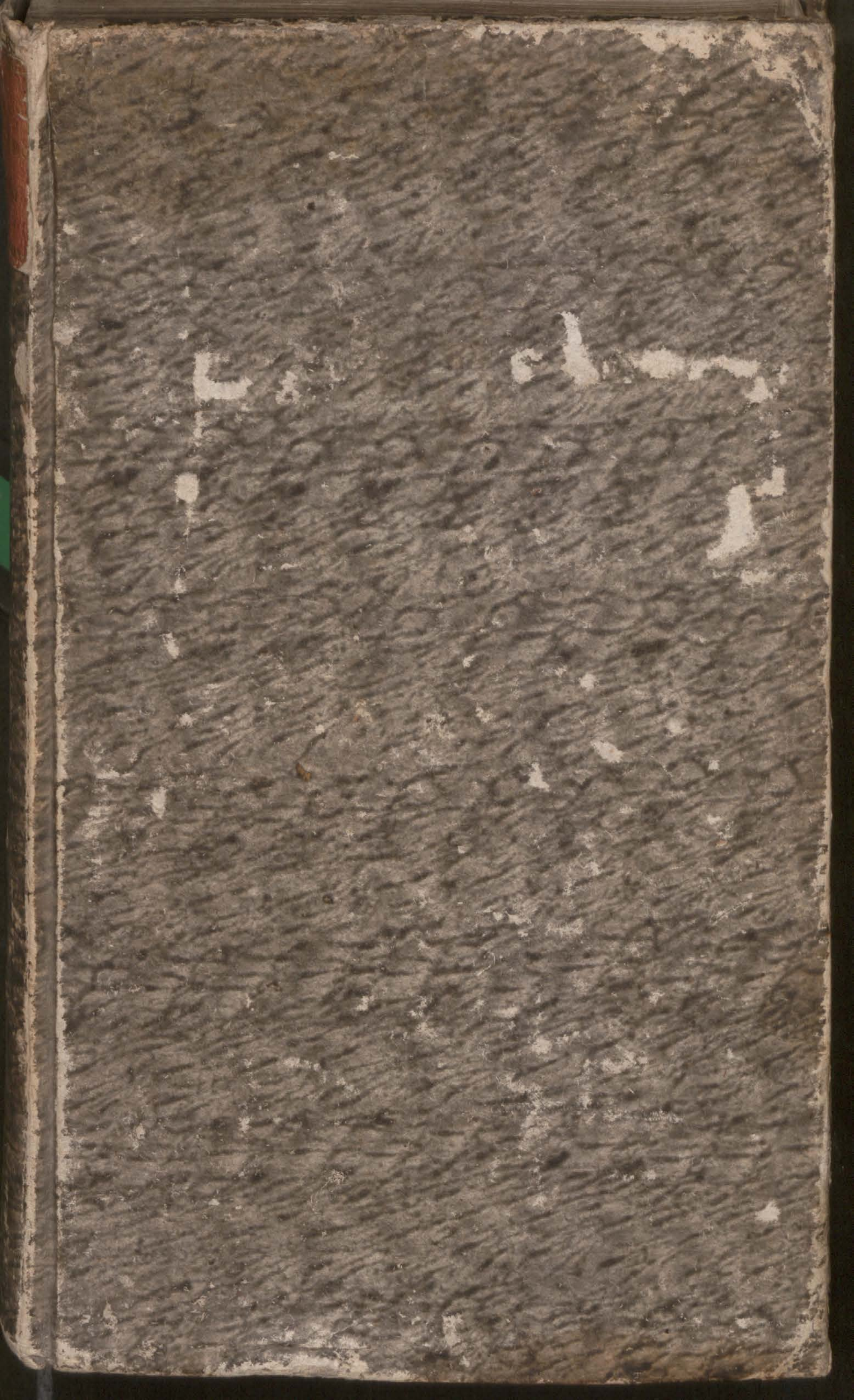
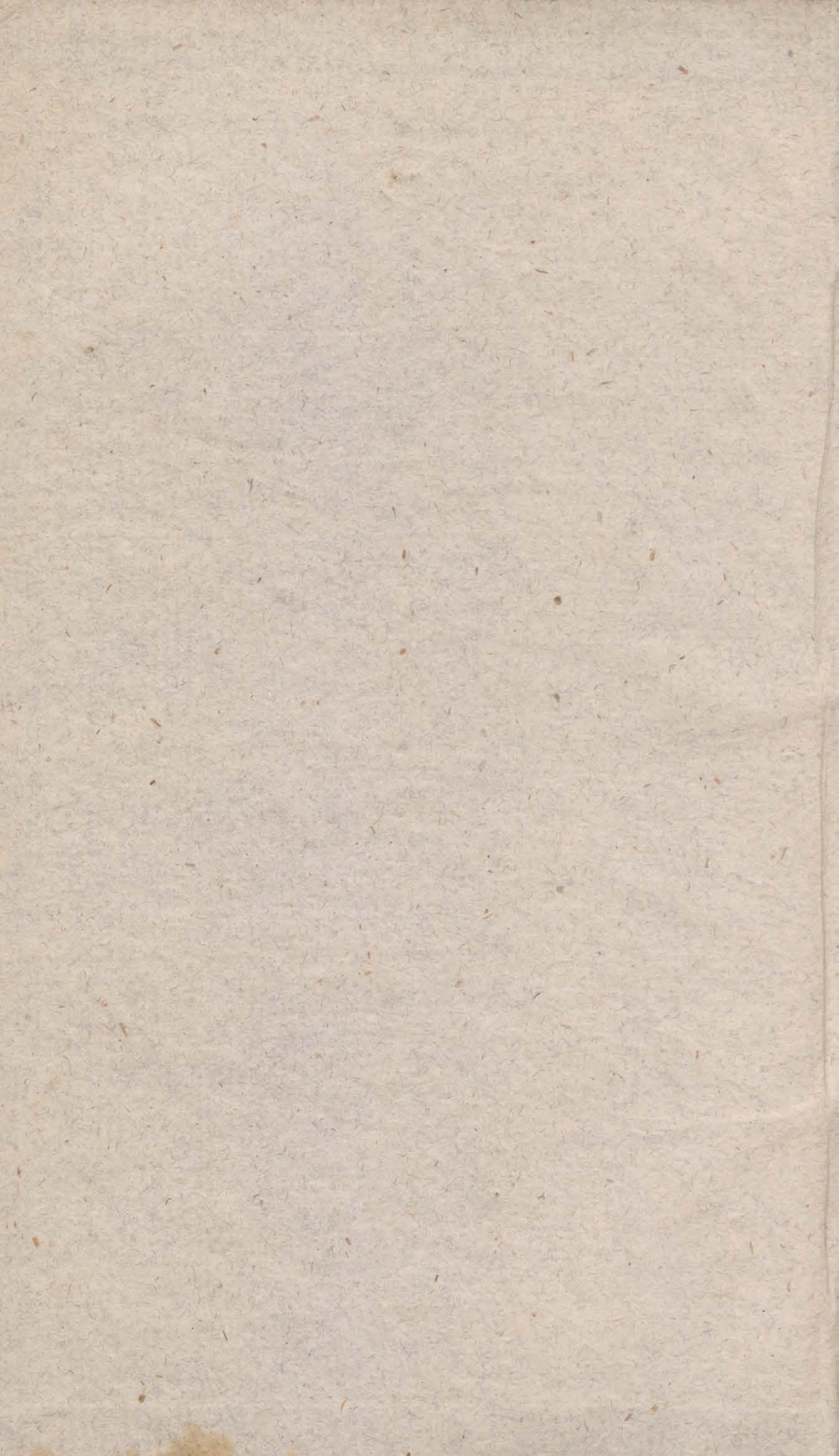
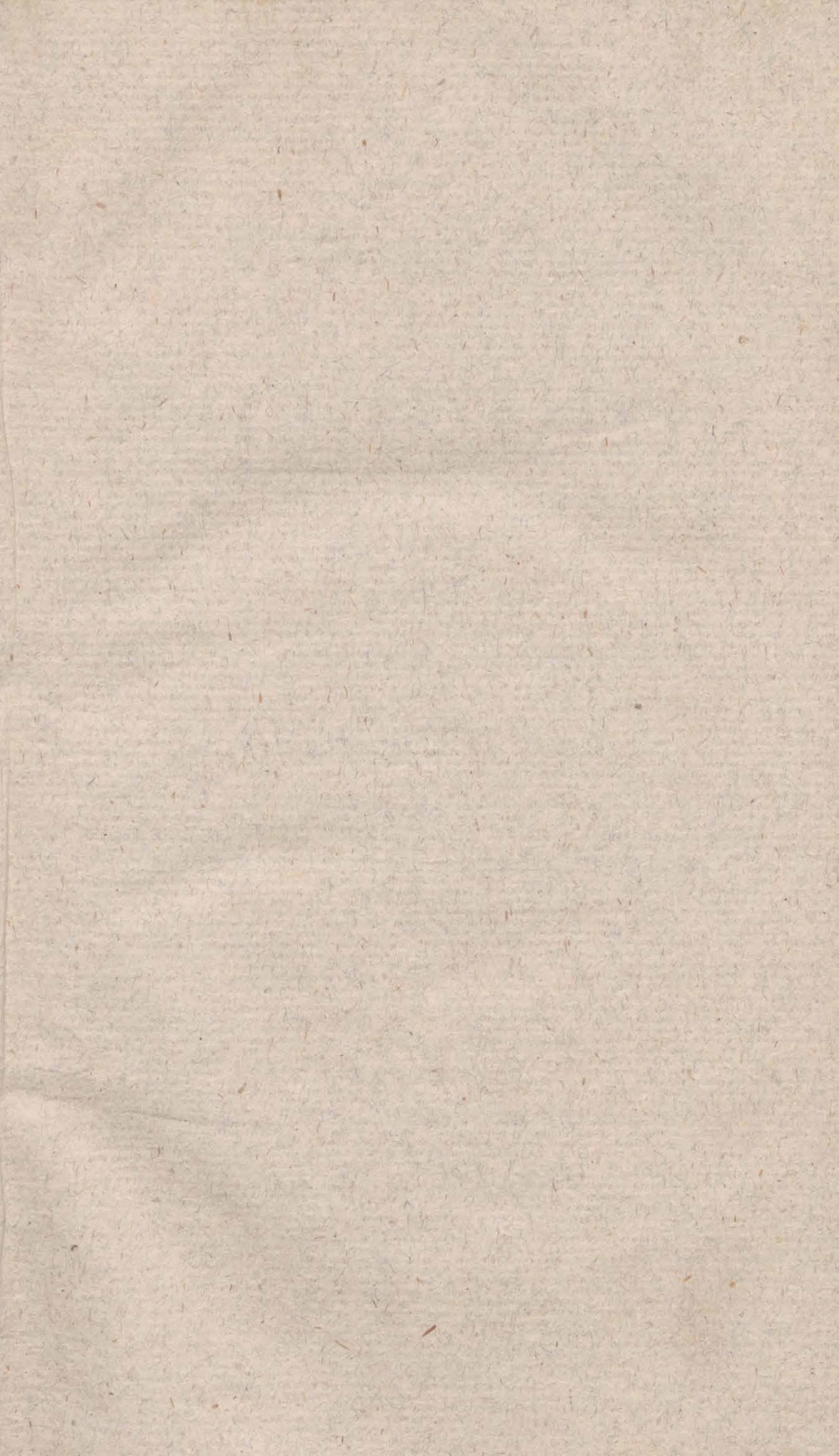
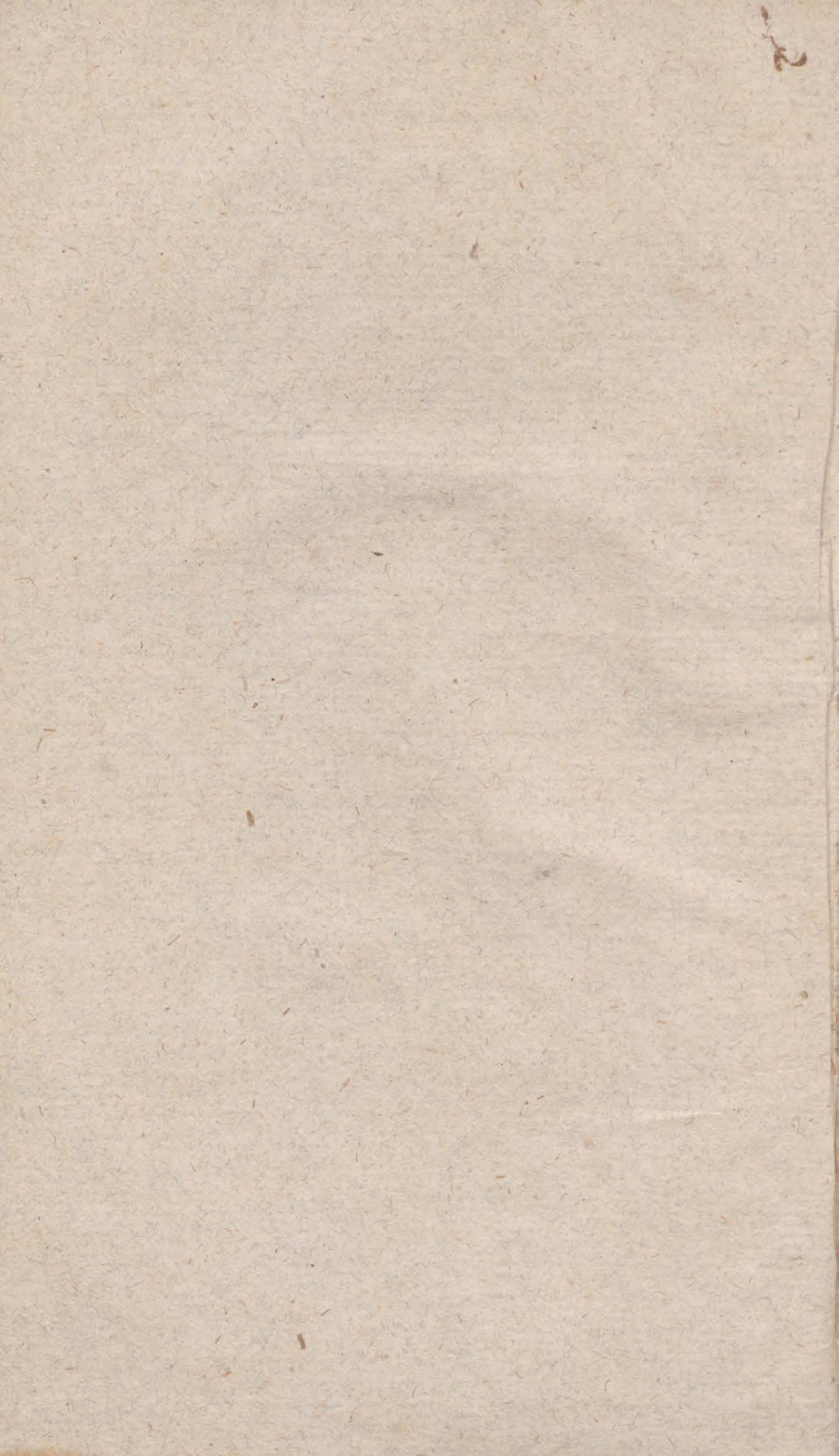








S. F. Lacroix

Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculs.

Aus dem Französischen übersetzt und mit einigen Zusätzen und Anmerkungen begleitet von

Johann Philipp Grüson

Königl. Professor der Mathematik bey dem adeligen Cadettencorps und bey der Königl. Bauakademie in Berlin, und ordentlichem Mitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften u. s. w.

Zweiter Theil.

Mit 6 Kupfertafeln.

Berlin, Bey F. T. Lagarde 1800.



Inhalt des zweyten Theils.

Drittes Capitel. Digression über die algebraischen Gleichungen. S. 1.

Viertes Capitel. Theorie der krummen Linie S. 81

Géo-

Drittes Capitel.

Digression über die algebraischen Gleichungen.

Ich nehme mir vor, in diesem Capitel das, was in der Theorie der Gleichungen in den Anfangsgründen der Algebra fehlt, zu ergänzen, obgleich die Gegenstände, welche ich hier abhandle, nicht zu dem Differentialcalcul zu gehöten scheinen, so geben sie dennoch Veranlassung zu verschiednen zierlichen Anwendungen dieses Calculs, und tragen dazu bey, die Hülfsmittel zu zeigen, die er darbieten kann. Aus dieser Ursache und aus Furcht, die Darlegung der Principien des Differentialcalculs zu verzögern, indem ich die Einleitung zu sehr ausdehnte, habe ich beschlossen, hier eine Abschweifung zu machen, welche viele Leser ohne Zweifel nützlich finden werden und welche die andern übergehn können, wenn sie es für gut finden.

157.

Untersuchung der symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen.

Man weiß, daß eine algebraische Gleichung von irgend einem Grade und welche nur eine unbekannte Grö-

ße enthält, das Product von eben so viel Binomen wie $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. ist, als Einheiten in ihrem höchsten Exponenten sind. Man hat den Ausdruck der Wurzeln α, β, γ, etc. in Function der Coefficienten der Gleichung für die ersteu vier Grade, und für einige Classen von Gleichungen von allen Graden; aber die vollständige Auflösung des allgemeinen Problems ist noch zu finden. Indessen können gewisse Functionen der Wurzeln von irgend einer Gleichung, auf eine rationale Art, vermittelst ihren Coefficienten ausgedrückt werden, und man erhält sie folglich durch Gleichungen vom ersten Grade; die Functionen von denen ich rede, sind die, welche alle, auf eine ähnliche Art verbundnen Wurzeln in sich begreifen, es sey nun unter sich, oder mit andern Größen, und die ich daher symmetrische Functionen nennen werde: die Summe der Wurzeln, die ihrer Producte zu zwey und zwey, zu drey und drey u. s. w. respective den Coefficienten des 2ten 3ten 4ten etc. Gliedes gleich, sind von dieser Art.

Der Grund der Wahrheit, deren wir uns so eben erinnert haben, findet sich in einer sehr merkwürdigen Eigenschaft der Analysis, und ist eine nothwendige Folge ihrer Allgemeinheit; daß nemlich die Gleichung, von der die Bestimmung irgend einer Function abhängt, immer alle Werthe in sich begreift, deren diese Function fähig ist, indem man darin die einen in die anderen umändert, die Größen unter der Ordnung, und der Werth von denen die Uebereinkunft nichts besonderes festgesetzt hat.

Die folgenden Fragen werden, obgleich sie sehr einfach sind, das größte Licht über alles dieses verbreiten. Wir suchen zuerst also zwey Größen deren Summe $= p$, und deren Product $= q$ sey.

Indem

Indem wir die beyden unbekannten Größen durch x und y vorstellen, haben wir

$$\left.\begin{matrix} x + y = p \\ x y = q \end{matrix}\right\} \text{woraus folgt} \left\{\begin{matrix} x^2 - px + q = 0 \\ y^2 - py + q = 0 \end{matrix}\right.$$

Die beyden unbekannten Größen x und y, werden also die Wurzeln von einerley Gleichung seyn, weil sie alle beyde auf die nemliche Art, in die Bedingungen des Problems einschleichen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß, anstatt unmittelbar die Größen x und y zu suchen, wir uns begnügen, den Werth ihrer Differenz $= x - y$ zu fodern. Man wird dies ohne Mühe erhalten, denn zufolge den vorgegebenen Gleichungen wird man haben, $x^2 + 2xy + y^2 = p^2$ und $4xy = 4q$; dieses 2te Resultat vom ersten abgezogen kömmt:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = p^2 - 4q,$$

woraus

$$x - y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Man konnte vorher sehen, daß die Function $x - y$ zwey Werthe haben, und daß sie folglich von einer Gleichung des 2ten Grades abhängen würde, denn nichts in der Aussage der Frage, und in der Art sie aufzulösen zeigt an, daß man $x - y$ oder $y - x$ suchte. Im Gegentheil, die Function $x^2 + y^2$, in welcher es gleichgültig ist, x in y zu verwandeln, und umgekehrt, da sie nur einen Werth haben kann, hängt bloß von einer Gleichung des 1ten Grades ab. In der That, wenn man von der Gleichung

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2,$$

diese abzieht,

$$2xy = 2p,$$

so erhält man

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q.$$

Diese Bemerkungen werden noch besser verstanden werden, wenn man an den Gang der Analysis gewöhnet ist.

158.

Wir wollen jetzt den Ausdruck der Summe der ähnlichen Potenzen aller Wurzeln einer Gleichung suchen, und die Auflösung dieses Problems werden wir zuerst aus dem Differentialcalcul ziehen.

Es seyen α, β, γ, δ etc. die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U = 0,$$

so wird man haben

$$(x - \alpha)\ (x - \beta)\ (x - \gamma)\ (x - \delta) \text{ etc.}$$
$$= x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U;$$

Wenn man den Logarithmen jedes dieser Glieder von dieser letzten Gleichung nimmt, so wird man finden:

$$l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) + l(x-\delta) + \text{etc.}$$
$$= l(x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U)$$

Wenn man differentiirt und mit dx dividirt, so kömmt,

$$\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \frac{1}{x-\delta} + \text{etc.}$$
$$= \frac{mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} + (m-3)Rx^{m-4} \ldots}{x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U.}$$

Aber man weiß, daß

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-\beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{1} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-\delta} = \frac{1}{x} + \frac{\delta}{x^2} + \frac{\delta^2}{x^3} + \frac{\delta^3}{x^4} + \text{etc.}$$

etc.

sub-

substituirt man diese Werthe in der ersten Hälfte der vorhergehenden Gleichung, und nimmt an

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = S_1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = S_2 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = S_3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

so wird man haben:

$$\frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \text{etc.} =$$

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} + (m-3)Rx^{m-4} \ldots}{x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U}$$

Und wenn man den Nenner der 2ten Hälfte fortschaft, und nachher die Glieder jeder Hälfte vergleicht, welche durch die nemliche Potenz von x bezeichnet sind, so kömmt man zu folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} m = m \\ (m-1)P = mP + S_1 \\ (m-2)Q = mQ + PS_1 + S_2 \\ (m-3)R = mR + QS_1 + PS_2 + S_3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

welches giebt

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + P = 0 \\ S_2 + PS_1 + 2Q = 0 \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0. \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Diese letztern, deren Gesetz leicht einzusehen ist, fassen den Lehrsatz in sich, welchen Newton in seiner allgemeinen Arithmetik vorgetragen brachte, und welchen er auf die Gleichung

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

angewendet hat. In diesem besondern Falle, wo

 P = − 1,

$P = -1,\ Q = -19,\ R = +49,\ S = -30$
ist, hat er gefunden
$S_1 = 1,\quad S_2 = 39,\quad S_3 = -89,\quad S_4 = 723.$

159.

Mit Hülfe der im vorigen Paragraph angeführten Resultate, wird jede algebraische rationale und symmetrische Function irgend einer Gleichung, sich durch die Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken lassen. Das folgende Beispiel wird, obgleich particulair hinlänglich zeigen, auf welche Art die Sache im Allgemeinen ausgeführt werden muß.

Es seyn α, β, und γ die Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade; wenn man die Größen

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n = S_n,\ \text{und}\ \alpha^p + \beta^p + \gamma^p = S_p,$$

eine mit der andern multiplicirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{n+p} + \beta^{n+p} + \gamma^{n+p} \\ + \alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p\gamma^n + \beta^n\gamma^p + \beta^p\gamma^n\end{array}\right\} = S_n S_p:$$

Aber die erste Zeile der ersten Hälfte ist gleich S_{n+p}, und die zweyte ist eine symmetrische Function der Wurzeln α, β, γ, welche entsteht, indem man sie zu zwey und zwey verbindet, und sie nach ihrer Folge mit den Exponenten n und p bezeichnet; man wird also erhalten:

$$\alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p\gamma^n + \beta^n\gamma^p + \beta^p\gamma^n = S_n S_p - S_{n+p}.$$

Es ist leicht einzusehn, daß, in welcher Zahl auch die Buchstaben α, β, γ, etc. stehn, der Werth einer symmetrischen Function von der Form $\alpha^n \beta^p +$ etc. immer seyn wird: $S_n S_p - S_{n+p}$, indem die Summen $S_n S_p$ und S_{n+p} für die Zahl der Wurzeln, welche man betrachtet, berechnet sind.

Wenn wir die Gleichung zu der wir so eben gelangt sind, mit $\alpha^q + \beta^q + \delta^q = S_q$ multipliciren, so erhalten wir

α^{n+q}

$$\left.\begin{array}{r}\alpha^{n+q}\beta^{p}+\alpha^{p}\beta^{n+q}+\alpha^{n+q}\gamma^{p}+\alpha^{p}\gamma^{n+q}\\ +\beta^{n+q}\gamma^{p}+\beta^{p}\gamma^{n+q}\\ +\alpha^{p+q}\beta^{n}+\alpha^{n}\beta^{p+q}+\alpha^{p+p}\gamma^{n}+\alpha^{n}\gamma^{p+q}\\ +\beta^{p+q}\gamma^{n}+\beta^{n}\gamma^{p+q}\\ +\alpha^{n}\beta^{p}\gamma^{q}+\alpha^{n}\beta^{q}\gamma^{p}+\alpha^{p}\beta^{n}\gamma^{q}+\alpha^{p}\beta^{q}\gamma^{n}\\ +\alpha^{q}\beta^{n}\gamma^{p}+\alpha^{q}\beta^{p}\gamma^{n}\end{array}\right\}=S_nS_p\ S_q-S_{n+p}\ S_q;$$

die beyden ersten Zeilen der ersten Hälfte dieser Gleichung, welches symmetrische Functionen durch das Product zweyer Buchstaben gebildet, sind, werden nach dem Vorhergehenden respective ausgedrückt seyn durch

$$S_{n+q}\ S_p-S_{n+p+q} \text{ und } S_{p+q}\ S_n-S_{n+p+q},$$

und man wird daraus schließen, daß die 3te Zeile, welche eine symmetrische Function, aus Producten von 3 Factoren gebildet, ist, gleich seyn wird

$$S_n\ S_p\ S_q-S_{n+p}\ S_q-S_{n+q}\ S_p-S_n+2S_{n+p+q}.$$

Man würde also hier noch, wie im vorhergehenden Falle ein Resultat von der nemlichen Form haben; wie groß auch die Zahl der Buchstaben sey, so daß der obige Ausdruck für alle durch Produkte aus drey Buchstaben zusammengesetzten symmetrischen Functionen paßt.

Das Verfahren dessen wir uns hier bedient haben um die beyden vorhergehenden Formeln zu entdecken, ist allgemein, und wenn wir mit der Multiplication fortfahren so kommen wir zum Ausdruck irgend einer symmetrischen Function, welche nichts als eine Folge von solchen Gliedern ist wie $\alpha^n\beta^p\gamma^q\delta^r$ etc. und in welchen jeder der Buchstaben α, β, γ, δ etc. sich successive mit allen Exponenten behaftet findet. Es ist hier nöthig zu wissen, daß man immer eine symmetrische Function daran erkennen wird, daß sie ihren Werth nie ändert, man mag die verschiednen Wurzeln der gegebnen Gleichung versetzen,

 wie

wie man will. Die Bruchfunctionen werden keinen besondern Abschnitt machen, denn so bald sie symmetrisch sind, folgt daraus daß ein Bruch dessen beyde Glieder symmetrische und ganze Functionen sind, nachdem man ihnen einen gleichen Nenner gegeben, wie z. B. die Function

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha},$$

zu folgendem führt:

$$\frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma},$$

ein Resultat, dessen Zähler und Nenner symmetrische Functionen sind. Verschiedene Geometer haben sich besonders mit diesen Untersuchungen beschäftigt, und Vandermonde insbesondere hat einen Algorithmus erdacht, vermittelst welches er allgemeine Formeln construirte welche unmittelbar den Ausdruck jeder symmetrischen Function enthalten. Wer diese Formeln zu kennen wünscht, kann darüber seine Memoires zu Rathe ziehen.

160.

Wenn man eine Function hätte, in welcher nur einige von den Wurzeln der gegebnen Gleichung enthalten wären, so würde man doch mit Hülfe des Vorhergehenden die neue Gleichung bilden können, von welcher sie abhängen muß. Nehmen wir an, daß man die Summe von irgend 2 Wurzeln einer allgemeinen Gleichung vom 3ten Grade bestimmen sollte; da hier kein Grund vorhanden ist diese Summe eher durch $\alpha + \beta$, als durch $\alpha + \gamma$, oder $\beta + \gamma$ vorzustellen, so muß man sich diese 3 Ausdrücke als Werthe denken, deren sie fähig ist. Sie wird folglich von einer Gleichung des 3ten Grades abhän=

abhängen, indem sie zu Wurzeln $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, und $\beta+\gamma$ hat, und welche man bildet, indem man das Produkt der Factoren

$$z-(\alpha+\beta),\quad z-(\alpha+\gamma),\quad z-(\beta+\gamma)$$

gleich o setzt.

Wenn wir den Calcul wirklich machen, erhalten wir

$$\left.\begin{matrix} z^3-2(\alpha+\beta+\gamma)z+[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma]z \\ -(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)-2\alpha\beta\gamma \end{matrix}\right\}=0.$$

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z in diesem Resultate, sind symmetrische Functionen, deren Ausdruck man leicht finden wird, so wie die Werthe der unbekannten Größe z auch die von der gesuchten Function seyn werden.

Wenn die allgemeine Gleichung vom dritten Grade durch

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$

vorgestellt wird, so hat man

$$\alpha+\beta+\gamma=-P,\quad \alpha^2+\beta^2+3\alpha\beta+\alpha\gamma-3\beta\gamma=P^2+Q,$$

und

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2=S_2S_1-S_3.$$

Aber man hat durch die Gleichungen in Num. 158

$$S_1=-P,\quad S_2=P^2-2Q,$$
$$S_3=-P^3+3PQ-3R$$

ferner $-\alpha\beta\gamma=R$. Es kömmt also:

$$-(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)-2\alpha\beta\gamma=+PQ-R,$$

und zum letzten Resultate

$$z^3+2Pz^2+(P^2+Q)z+PQ-R=0.$$

Dieses Beyspiel zeigt, daß, um die Gleichung zu finden, von welcher irgend eine Function der Wurzeln von einer gegebnen Gleichung abhängt, man in dieser Function alle mögliche Versetzungen der Buchstaben α, β, γ, δ,

machen, und indem man durch $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ die verschiedenen so erhaltnen Resultate bezeichnet, das Product der Factoren

$$z - \alpha', \quad z - \beta', \quad z - \gamma', \quad z - \delta', \text{ etc.}$$

gleich Null setzen muß. Die Coefficienten der Potenzen von z in der Gleichung, zu welcher man kommen wird, da sie symmetrische Functionen der Größen α', β', γ', δ' etc. sind, welche unter sich alle Combinationen, die man von den Größen α, β, γ, δ in der gesuchten Function machen kann, enthalten, werden auch die symmetrischen Functionen dieser letztern seyn, und man wird sie folglich durch die Coefficienten unter einer der gegebenen Gleichung rationalen Form ausdrücken können. Es ist leicht zu sehen, daß keine der symmetrischen Functionen von α', β', γ', δ', etc. ihren Werth ändern kann, wie man auch die Buchstaben α, β, γ, δ, unter sich versetze. Und eben diese Unveränderlichkeit, ist, wie wir schon weiter oben gesehen haben, das wesentliche Kennzeichen der symmetrischen Functionen.

Die Theorie, von welcher ich in den vorhergehenden Paragraphen einen kurzen Begriff gegeben habe, sollte künftig in allen Elementen der Algebra stehen. Mit ihrer Hülfe zeigt sich die Auflösung der Gleichungen in einem sehr hellen Lichte. Der Geist der Kunstgriffe, welchen man zu dieser Auflösung anwendet, wird leicht zu fassen, und man sieht, warum ihr Erfolg sich nicht bis über den vierten Grad erstreckt. Ich bedaure sehr daß die Natur meines Gegenstandes mir nicht verstattet, die schöne Arbeit von Lagrange über diese Materie, kennen zu lehren.

161.

Der Nutzen des Newtonschen Theorems, zu welchem ich in Num. 158 durch den Differentialcalcul gelangt bin, hat mich auf den Gedanken gebracht, daß man eine reine algebraische Demonstration darüber, welche ich für neu halte, und die, wie mir scheint, ihrer Einfachheit halber bekannter zu seyn, verdient, gern sehen würde.

Die Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0,$$

ist durch jedes der Binomen

$$x - \alpha,\ x - \beta,\ x - \gamma,\ x - \delta, \text{ etc.}$$

theilbar, und man kann einen allgemeinen Ausdruck des Quotienten erhalten. Lagrange in einer seiner Memoires bestimmt ihn, wie folgt: er beobachtet, daß, indem man in der gegebenen Gleichung α für x setzt, man durch die Hypothese ein Resultat, welches identisch $= 0$ ist, haben wird, und man also annehmen muß

$$\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + R\alpha^{m-3} \ldots + T\alpha + U = 0.$$

Wenn man diese Gleichung von der gegebenen abzieht, so kömmt

$$(x^m - \alpha^m) + P(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + Q(x^{m-2} - \alpha^{m-2})$$
$$+ R(x^{m-3} - \alpha^{m-3}) \ldots + T(x - \alpha) = 0;$$

eine Gleichung, die augenscheinlich durch $x - \alpha$ theilbar ist, denn man weiß, und es ist leicht zu beweisen, daß

$$\frac{x^m - \alpha^m}{x - \alpha} = x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} \ldots + \alpha^{m-1}$$

ist. Man wird ähnliche Quotienten für

$$\frac{x^{m-1} - \alpha^{m-1}}{x - \alpha},\ \frac{x^{m-2} - \alpha^{m-2}}{x - \alpha}$$

finden, und für das Resultat, der Division durch $x - \alpha$, in der vorhergehenden Gleichung, wird man haben,

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
x^{m-1} + \alpha & x^{m-3} + \alpha^{2} & x^{m-3} + \alpha^{3} & x^{m-4} \ldots + \alpha^{m-1} \\
+ P & + \alpha P & + \alpha^{2} P & + \alpha^{m-2} P \\
 & + Q & + \alpha Q & + \alpha^{m-3} Q \\
 & & + R & + \alpha^{m-4} R \\
 & & & \ldots\ldots \\
 & & & + T.
\end{array}$$

Hier fängt die Demonstration an, von welcher ich geredet habe. Es ist augenscheinlich, daß wenn man auch die gegebne Gleichung durch $x - \beta$ dividirt, man erhalten wird

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
x^{m-1} + \beta & x^{m-2} + \beta^{2} & x^{m-3} + \beta^{3} & x^{m-4} \ldots + \beta^{m-1} \\
+ P & + \beta P & + \beta^{2} P & + \beta^{m-2} P \\
 & + Q & + \beta Q & + \beta^{m-3} Q \\
 & & + R & + \beta^{m-4} R \\
 & & & \ldots\ldots \\
 & & & + T.
\end{array}$$

Ebenfalls wenn man durch $x - \gamma$ dividirt, so findet man

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
x^{m-1} + \gamma & x^{m-2} + \gamma^{2} & x^{m-3} + \gamma^{3} & x^{m-4} \ldots + \gamma^{m-1} \\
+ P & + \gamma P & + \gamma^{2} P & + \gamma^{m-2} P \\
 & + Q & + \gamma Q & + \gamma^{m-3} Q \\
 & & + R & + \gamma^{m-4} R \\
 & & & \ldots\ldots \\
 & & & + T.
\end{array}$$

Wenn man so fortfährt, erhält man so viel Quotienten als Wurzeln da sind, und ihre Summe wird seyn:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
mx^{m-1} + S_{1} & x^{m-2} + S_{2} & x^{m-3} + S_{3} & x^{m-4} \ldots + S_{m-1} & \\
+ mP & + PS_{1} & + PS_{2} & + PS_{m-2} & \\
 & + mQ & + QS_{1} & + QS_{m-3} & (A) \\
 & & + mR & + RS_{m-4} & \\
 & & & \ldots\ldots & \\
 & & & + mT. &
\end{array}$$

Wir

Wir werden jetzt wahrnehmen, daß jeder einzelne Quotient den Produkt aus allen Factoren der angegebenen Gleichung außer denjenigen, mit welchem man dividirt ist. Der erste dieser Quotienten z. B. enthält alle Factoren außer $x-\alpha$: der Coefficient seines zweyten Gliedes, wird also die Summe aller Wurzeln, außer α, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, seyn; der seines dritten Gliedes, die Summe aller Produkte zu zwey und zwey, außer denen, welche durch die Verbindung des Buchstabens α mit jedem andern entstehn: der Coefficient des vierten Gliedes enthält alle Produkte zu drey und drey, mit Ausnahme derer, welche durch Combination des Buchstabens α mit irgend zwey andern entstehn, und so alle folgenden Coefficienten. Was von dem ersten Quotienten, und dem Buchstaben α gesagt worden ist, gilt auf die nemliche Art für den zweyten und den Buchstaben β, für den dritten und den Buchstaben γ, etc.

Es folgt daraus, daß der Quotient des zweyten Gliedes in der Summe der Quotienten, und die Function (A) gleich ist $(m-1)$ mal der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen genommen; denn wenn alle diese Buchstaben sich in jedem Puotienten fänden, so würde man m mal diese Summe haben, aber da jeder Buchstabe einmahl fehlt, nach dem Obengesagten, so werden sie nur $(m-1)$mal wiederholt. Man hat also $(m-1)P$ für den Coefficienten des zweytes Gliedes von (A) und folglich $S_1 + mP = (m-1)P$.

Der Coefficient des dritten Gliedes der Function (A enthält einige Male die verschiednen Producte der Wurzeln α, β, γ, δ etc. zu zwey und zwey verbunden, aber jedes dieser Produkte wird in zwey Quotienten fehlen: $\alpha\beta$ z. B. wird sich weder im ersten noch im zweyten finden,

den, alle sind nur $(m - 2)$mal wiederholt, und da ihre Summe durch Q in der gegebenen Gleichung ausgedrückt ist, so wird man $(m - 2)Q$ für den Coefficienten des dritten Grades der Function (A) haben woraus folgt,

$$S_2 + PS_1 + mQ = (m - 2)Q.$$

Der Coefficient des vierten Gliedes der Function (A) wird von den Producten der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen genommmen, und zu drey und drey combinirt, gebildet, aber jedes dieser Produkte fehlt in drey Quotienten z. B. $-\alpha\beta\gamma$, wird sich weder im ersten, noch zweyten, noch im dritten finden; Alle werden daher nur $(m - 3)$mal wiederholt. Wenn ihre Summe R ist, so wird in der vorgegebenen Gleichung $(m - 3)R$ der gesuchte Coefficient seyn; und man wird folglich haben:

$$S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m - 3)R.$$

Man kann diese Raisonnements so weit man will, treiben, und man wird finden,

$$\left.\begin{array}{r} S_1 + mP = (m-1)P \\ S_2 + PS_1 + mQ = (m-2)Q \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m-3)R \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

woraus

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + P = 0 \\ S_2 + PS_1 + Q = 0 \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Man wird durch diese Formeln die Summe der Potenzen der Wurzeln so lange erhalten, als der Exponent weniger als m ist, aber nichts ist leichter als sie über dieses Glied hinauszufinden. In der That, genügt es, hierzu, wie Euler bemerkt hat, die gegebene Gleichung mit x^n zu multipliciren, es kömmt dann:

x^{m+n}

$$x^{m+n} + Px^{m+n-1} + Qx^{m+n-2} + Rx^{m+n-3} \ldots$$
$$\ldots + Tx^{n+1} + Ux^{n} = 0$$

Und wenn man successive α, β, γ, δ, an die Stelle von x setzt, so kommt,

$$\alpha^{m+n} + P\alpha^{m+n-1} + Q\alpha^{m+n-2} + R\alpha^{m+n-3} \ldots$$
$$\ldots + T\alpha^{n+1} + U\alpha^{n} = 0$$
$$\beta^{m+n} + P\beta^{m+n-1} + Q\beta^{m+n-2} + R\beta^{m+n-3} \ldots$$
$$\ldots + T\beta^{n+1} + U\beta^{n} = 0$$

etc.

Wenn man diese Resultate unter sich zusammensetzt, so wird man der angenommenen Bezeichnung zufolge, haben:

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} + RS_{m+n-3} \ldots$$
$$\ldots TS_{n+1} + US_{n} = 0$$

Diese Gleichung verbindet sich vollkommen mit den vorigen, denn indem man $n = 0$ macht, hat man

$$S_n = \alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ + \delta^\circ + \text{etc.} = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ etc.} = m,$$

und folglich

$$S_m + PS_{m-1} + QS_{m-2} + RS_{m-3} \ldots + TS_1 + mU = 0,$$

ein Resultat dessen Form der von der letztern der oben gefundenen Gleichungen entspricht, welches seyn würde

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} + RS_{m-4} \ldots + (m-1)T = 0.$$

162.

Ueber die imaginairen Ausdrücke.

In den Gleichungen vom 2ten Grade fangen die imaginairen Wurzeln an, sich zu zeigen, und hier haben sie die Form

$$A \pm B\sqrt{-1}.$$

Maclaurin zeigte das nemliche für die Gleichungen des dritten Grades: d'Alembert ging weiter und bewies

wies zuerst, daß jeder imaginaire Ausdruck sich immer auf die Form

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

zurückführen lasse, wo A und B wirkliche Größen sind, aber er machte es auf eine indirecte Art in Hinsicht der Wurzeln der Gleichungen. Diesen Theil des Theorems, der einzige, mit welchem wir uns gegenwärtig beschäftigen können, dient nur dazu, die Möglichkeit zu zeigen, daß man jede Gleichung von jedem geraden Grade in wirkliche Factoren vom 2ten Grade zerlegen könne. Euler, versuchte es dieses durch bloße algebraische Betrachtungen zu bewerkstelligen, allein es gelang ihm nicht ganz, welches Lagrange veranlaßte, diesen nemlichen Gegenstand von neuem zu bearbeiten; und endlich hat Laplace in das Journal der Normalschule, eine Demonstration einrücken lassen, welche nichts mehr, weder für die Genauigkeit als auch für die Einfachheit zu wünschen übrig läßt, und welche ich hier mittheilen will. Ich werde also beweisen, daß jede Gleichung von irgend einem Grade p einen wirklichen Factor vom zweyten Grade haben wird, wenn jede Gleichung vom Grade

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

einen wirklichen Factor, vom ersten oder zweyten Grade hat.

Ich werde die Gleichung vom Grade p durch (P) bezeichnen, und ihre Wurzeln durch α, β, γ, δ, etc.; dies festgesetzt, beobachte ich, daß jeder Factor des zweyten Grades der Gleichung (P) nichts anders als ein Product von irgend zwey Factoren des ersten Grades ist, und daher nothwendig die Form

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

haben,

haben, und folglich von den Functionen $\alpha + \beta$, α^β abhängen wird. Diese Functionen würden bestimmt seyn, wenn man zwey von der Form

$$\alpha + \beta + M\alpha\beta, \quad \alpha + \beta + M'\alpha\beta,$$

kennte, wo M und M' gegebene Zahlen bezeichnen, denn indem man

$$\alpha + \beta + M\alpha\beta = N, \quad \alpha + \beta + M'\alpha\beta = N'$$

macht, so findet man

$$\alpha + \beta = \frac{M'N - N'M}{M' - M}, \quad \alpha\beta = \frac{N' - N}{M' - M}.$$

Die Function $\alpha + \beta + M\alpha\beta$ ist so vieler verschiedenen Ausdrücke fähig, als man die Buchstaben α, β, γ, δ, etc. zu zwey und zwey verbinden kann, und wird durch eine Gleichung vom Grade $\frac{p(p-1)}{2}$ erhalten, (N. 160) welche ich durch Q bezeichnen werde.

Nehmen wir an, daß 1) diese Gleichung immer eine wirkliche Wurzel habe, indem man M eine unendliche Menge von Werthen giebt, so wird man eine unendliche Zahl von ähnlichen Gleichungen haben, von denen jede eine wirkliche Wurzel hat, indem sie eine der Verbindungen, welche man von den Wurzeln der gegebenen Gleichung in der Formel $\alpha + \beta + M\alpha\beta$ machen kann, in sich enthält. Ist nun die Zahl der Verbindungen begrenzt, so wird nothwendiger Weise eine öfter mit verschiednen Werthen von M wiederholt werden. Man kann daher festsetzen, daß es zum wenigsten zwey Functionen von der Form

$$\alpha + \beta + M\alpha\beta, \quad \alpha + \beta + M'\alpha\beta$$

giebt, deren Werthe N und N' wirklich sind, woraus folgt, daß die correspondirenden Werthe von $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ es auch sind, und daß endlich der Facter

 x^2 —



$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

selbst reel ist.

2) Wenn die Gleichung (Q) keine reele Wurzeln, sondern bloß einen reelen Factor vom zweyten Grade hat, dessen Wurzeln imaginair sind, und man giebt M eine unendliche Menge von Werthen, so erhält man eine unendliche Menge von Functionen $\alpha + \beta + M\alpha\beta$, deren Ausdruck von der Form

$$A + B\sqrt{-1}$$

seyn wird, und man beweiset wie vorhin, daß man verschiedne finden kann, welche sich nur durch die Werthe von M unterscheiden. Man wird also

$$\alpha + \beta + M\alpha\beta = A + B\sqrt{-1}$$
$$\alpha + \beta + M'\alpha\beta = A' + B'\sqrt{-1},$$

haben, woraus man zieht

$$\alpha + \beta = \frac{M'(A + B\sqrt{-1}) - M(A' + B'\sqrt{-1})}{M' - M},$$

$$\alpha\beta = \frac{A' + B'\sqrt{-1} - A - B\sqrt{-1}}{M' - M}$$

welche Ausdrücke ich durch $2(C + D\sqrt{-1})$ und $E + F\sqrt{-1}$, bezeichnen werde, und daher wird der Factor $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ werden,

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1}.$$

Aus der Existenz dieses Factors zieht man die eines andern, welcher

$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1}$$

seyn wird; denn es ist leicht zu sehn, daß, wenn man durch

$$X + Y\sqrt{-1}$$

den

den Quotienten bezeichnet, welchen die Gleichung (P) giebt, wenn man sie durch den ersten dividirt, so wird

$$X - Y\sqrt{-1}$$

den bezeichnen, welchen man aus der Division durch den Zweyten erhält.*)

Wenn nun die Polynomen

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1}) + E - F\sqrt{-1}$$

keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so begreifen sie beyde vier einfache Factoren der Gleichung (P) in sich, welche zu zwey und zwey multiplicirt, sechs Factoren vom zweyten Grade hervorbringen werden, unter welchen immer wenigstens zwey reele seyn werden. In der That, wenn man diese Polynomen wie Gleichungen vom zweyten Grade auflöset, so wird man die Factoren des ersten Grades davon ableiten.

$$x - C - D\sqrt{-1} + \sqrt{C^2 + 2CD\sqrt{-1} - D^2 - E - F\sqrt{-1}}$$
$$x - C - D\sqrt{-1} - \sqrt{C^2 + 2CD\sqrt{-1} - D^2 - E - F\sqrt{-1}}$$

*) Man wird sich davon überzeugen, wenn man

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1}$$

mit $X - Y\sqrt{-1}$ multiplicirt, so wie

$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1}$$

durch $X + Y\sqrt{-1}$: Man wird in beyden Fällen das nemliche Resultat finden, indem man beobachtet, daß der Dividendus (P) keine maginairen in sich begreift, Y und X werden so seyn, daß die Ausdrücke dieser Art, aus den obigen Producten verschwinden werden.

$$x - C + D\sqrt{-1} + \sqrt{C^2 - 2CD\sqrt{-1} - D^2 - E + F\sqrt{-1}}$$

$$x - C + D\sqrt{-1} - \sqrt{C^2 - 2CD\sqrt{-1} - D^2 - E + F\sqrt{-1}}$$

Wenn man das erste mit dem dritten, das zweyte mit dem vierten multiplicirt, und zur Abkürzung $C^2 - D^2 - E = G$, so wie $2CD - F = H$ setzt, und beobachtet, daß

$$\sqrt{G + H\sqrt{-1}} + \sqrt{G - H\sqrt{-1}} = \sqrt{2G + H\sqrt{G^2 + H^2}}$$

und

$$\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{G + H\sqrt{-1}} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{G - H\sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt{-2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}}$$

ist, so findet man

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - x(2C - \sqrt{2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}}) \\ + C^2 + D^2 - C\sqrt{2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}} \\ + \sqrt{G^2 + H^2} + D\sqrt{-2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - x(2C + \sqrt{2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}}) \\ + C^2 + D^2 + C\sqrt{2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}} \\ + \sqrt{G^2 + H^2} - D\sqrt{-2G + 2\sqrt{G^2 + H^2}} \end{array}\right\},$$

welches reele Resultate sind.

Wenn die beyden Polynomen

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1} \text{ und}$$

$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor hätten, indem man sie unter die Form

$$x^2 - 2Cx + E - (2Dx - F)\sqrt{-1}$$

$$x^2 - 2Cx + E + (2Dx - F)\sqrt{-1}$$

setzt

setzte, so würde man sehen, daß dieser Divisor auch den beyden Größen $x^2 - 2Cx + E$, und $2Dx - F$ gemein seyn soll, und man wird daraus schließen, daß er nur von der Form $x - I$ seyn kann, und daher hat man:

$$x^2 - 2Cx + E - (2Dx - F)\sqrt{-1} = (x - K - L\sqrt{-1})(x - I)$$

$$x^2 - 2Cx + E + (2Dx - F)\sqrt{-1} = (x - K + L\sqrt{-1})(x - I),$$

woraus folgt, daß

$$x - K - L\sqrt{-1}, \quad x - K + L\sqrt{-1}, \quad \text{und } x - I,$$

drey Factoren der Gleichung (P) seyn werden. Die beyden ersten geben einen reelen Factor vom zweyten Grade, und indem man die Gleichung (P) durch den dritten dividirt, wenn sie von einem geraden Grade ist, so erhält man einen Quotienten von einem ungeraden Grade, welcher selbst einen reelen Factor vom ersten Grade enthält, und mit dem, womit man dividirt hat, einen zweyten reelen Factor vom zweyten Grade bildet. Es ist daher genungsam bewiesen, daß die Gleichung (P) immer wenigstens einen reelen Factor vom zweyten Grade enthält, wenn die Gleichung (Q) immer einen reelen Factor vom ersten oder zweyten Grade enthält.

163.

Es wird jetzt leicht seyn zu zeigen, daß j e d e G l e i c h u n g v o n e i n e m g e r a d e n G r a d e, i n r e e l e F a c t o r e n v o m z w e y t e n G r a d e z e r l e g b a r s e y.

Ist die Zahl p gerade, so wird sie nothwendig von der Form $2^m . n$ seyn, wo m irgend eine ganze Zahl, und n, eine ungerade Zahl vorstellt, man wird daraus ziehen

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{2^m n(2^m n - 1)}{2} = 2^{m-1} n(2^m n - 1):$$

indem man nun $n(2^m n - 1) = n'$ macht, so wird n' noch eine ungerade Zahl seyn, und die Gleichung von dem Grade $2^m n$ wird nach dem Vorhergehenden einen reelen Factor vom zweyten Grade haben, wenn die Gleichung vom Grade $2^{m-1} n'$ einen reelen Factor vom ersten oder zweyten Grade hat. Aus dem nemlichen Grunde wird die Gleichung von dem Grade $2^{m-1} n'$ einen wirklichen Factor vom zweyten Grade haben, wenn die Gleichung von dem Grade $2^{m-2} n'(2^{m-1} n - 1)$ oder $2^{m-2} n''$ einen reelen Factor es sey vom ersten oder zweyten Grade hat. Indem man so fortfährt, durchläuft man eine Folge von Gleichungen, deren höchste Exponenten, von der Form

$$2^m n,\ 2^{m-1} n',\ 2^{m-2} n'', \ldots\ldots 2n'''\cdots^{m-1},\ n'''\cdots^{m},$$

seyn werden, wo die Zahlen n, n', n'' etc. alle ungerade seyn werden. Die letzte dieser Gleichungen, welche von einem ungeraden Grade, und durch $n'''\cdots^{m}$ bezeichnet seyn wird, muß nothwendig einen reelen Factor vom ersten Grade haben (Einleit. Num. 10). Die Vorletzte wird folglich einen vom zweyten haben, so wie jede andre bis zu den gegebenen vom Grade $2^m n$ inclusive. Nehmen wir hernach an, daß diese durch den Factor des zweyten Grades, dessen Existenz man so eben bewiesen hat, dividirt sey, so wird der Quotient, der noch von einem geraden Grade seyn wird, zum wenigsten noch einen reelen Factor vom zweyten Grade haben, durch den man von neuem dividiren kann. Ohne nöthig zu haben, weiter zu gehen sieht man, daß jede Gleichung vom geraden Grade immer in reele Factoren vom zweyten Grade aufgelöst

löst werden kann, woraus folgt, daß imaginaire Wurzeln, nur in gerader Anzahl, und in der Form

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

Statt haben können.

164.

Um d'Alemberts Satz in seinem ganzen Umfange zu umfassen, bleibt uns noch übrig, zu beweisen, daß die verschiednen bekannten Arten von Functionen auf die Form

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

zurückgeführt werden können, sobald sie solche Größen, wie $a + b\sqrt{-1}$ enthalten, wir werden es zuerst für die algebraische Functionen thun. In Hinsicht auf sie folgt die Sache natürlicher Weise aus dem Gesagten, denn indem man sie neuen unbekannten Größen gleich macht, und die Wurzelgrößen fortschaft, welche sie euthalten, so gelangt man zu algebraischen Gleichungen, deren imaginaire Wurzeln von der Form

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

seyn werden.

Man kann sich von dieser Wahrheit geradezu überzeugen, wenn man beobachtet, daß

1) $a + b\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1} - a'' + b''\sqrt{-1} + \ldots$
$= (a + a' - a'' + \ldots) + (b - b' + b'' + \ldots)\sqrt{-1}$

2) $(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) = aa' - bb'$
$+ (a'b + ab')\sqrt{-1},$

 3)

$$3)\quad \frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})\,(a' - b'\sqrt{-1})}{(a' + b'\sqrt{-1})\,(a' - b'\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{aa' + bb' + (a'b - ab')\sqrt{-2}}{a'^2 + b'^2}$$

4) endlich $(a + b\sqrt{-1})^m = a^m + \frac{m}{1}\,a^{m-1}\sqrt{-1}$

$$- \frac{m(m-1)}{1.2}\,a^{m-2}\,b^2 + \ldots$$

$$= \begin{cases} a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-1}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots \\ + \left(\frac{m}{1}a^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots\right)\sqrt{-1}, \end{cases}$$

woraus folgt, daß jeder aus derVerbindung verschiedner Größen von der Form

$$a + b\sqrt{-1},$$

durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division, und Erhebung zu Potenzen hervorgehende Ausdruck von der Form

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

seyn wird.

165.

Die in dem vorigen Artikel erhaltenen Resultate können durch die Sinus und Cosinus mit Eleganz ausgedrückt werden, und man zieht Formeln daraus, welche in der Analysis von großem Nutzen sind. Wenn man den Ausdruck

$a + b\sqrt{-1}$ mit $r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$

vergleicht, so findet man,

$$a = r\cos z, \quad b = r\sin. z,$$

und

und weil

$$\cos z^2 + \sin z^2 = 1,$$

so erhält man

$$a^2 + b^2 = r^2$$

der Werth von r ist also durch diese Gleichung bekannt. Man wird haben

$$\cos z = \frac{a}{r} \text{ und } \sin z = \frac{b}{r};$$

macht man nun eben so

$$a' + b'\sqrt{-1} = r'(\cos z' + \sqrt{-1} \sin. z')$$

so erhält man

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1})$$

$$= rr'(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z' + \sqrt{-1} \sin z)$$

$$= rr'[\cos(z + z') + \sqrt{-1} \sin(z + z')] \text{ (Einl. N. 51)}$$

Der Bruch $\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}}$ wird $\frac{r(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)}{r'(\cos z' + \sqrt{-1} \sin z')}$.

Wenn man nun diese beyden Glieder durch

$$(\cos. z' - \sqrt{-1} \sin z')$$

multiplicirt, so erhält man, zufolge der aus der Einleitung angeführten Nummer

$$\frac{r}{r'^3} [\cos(z - z') + \sqrt{-1} \sin(z - z')].$$

Die Function

$$(a + b\sqrt{-1})^m$$

giebt auf der Stelle

$$r^m(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^m = r^m(\cos mz + \sqrt{-1} \sin mz),$$

ein Resultat, aus welchem wir merkwürdige Folgerungen ziehen werden.

166.

Wenn man

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$$

hätte, so erhielte man

$$r^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\ \sin\ \frac{z}{m})$$

Dieser Ausdruck begreift eine Zahl m von verschiednen Werthen in sich, die man findet, wenn man bemerkt, daß die gegebenen Stücke der Frage folgende sind:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

und daß man folglich für z alle Bogen nehmen kann, deren Cosinus und Sinus mit den obigen gleich sind.

Wenn die Bogen

$$z,\ 360^\circ + z,\ 2.360^\circ + z,\ 3.360^\circ + z, \ldots n.360^\circ + z,$$

welche alle den nemlichen Sinus und Cosinus haben, jeder nach ihrer Tour angewandt werden, so erhält man, indem man $360^\circ = c$ setzt:

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{m}\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{(c+z)}{m} + \sqrt{-1}\ \sin\ \frac{(c+z)}{m}\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{(2c+z)}{m} + \sqrt{-1}\ \sin\ \frac{(2c+z)}{m}\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{(3c+z)}{m} + \sqrt{-1}\ \sin\ \frac{(3c+z)}{m}\right\},$$

$$\ldots$$

Die Zahl dieser Ausdrücke werden nicht über m hinaus gehen können, denn die Bogen

$$\frac{(m+1)c+z}{m} = c + \frac{c+z}{m},\ \frac{(m+2)c+z}{m} = c + \frac{2c+z}{m},$$

wel-

welche die nemliche Sinus und Cosinus wie die Bogen

$$\frac{c+z}{m},\ \frac{2c+z}{m}\ldots$$

haben, würden keine neue Werthe geben. *)

167.

*) Hier sind einige Erläuterungen für die, welche die Veränderungen der Zeichen nicht recht kennen sollten, welche die Kreisfunctionen erleiden.

Man weiß, daß die durch Linien vorgestellten Größen negativ werden, wenn sie in einem, dem entgegengesetzten Sinne stehen, in dem sie sich befanden, als man sie für positiv betrachtete, und daß die Sinus von dem Diameter aus und die Cosinus vom Mittelpunkt aus gemessen werden. Es folgt daraus, daß, wenn man die über dem Diameter AC (Fig. 1) liegende Sinus, und die zwischen den Puncten A und O stehende Cosinus für positiv annimmt, die erstern, welche unter AC liegen, und die andern, welche von O nach C fallen, negativ sind.

Dies festgesetzt, so zeigt die Figur, daß:

1) Der Bogen AM, welcher weniger als 90° beträgt, einen positiven Sinus PM, und Cosinus OP habe.

2) Der Sinus F′M′ des stumpfen Winkels ABM′ positiv, und sein Cosinus OP′ negativ sey.

3) Der Sinus P″M″, so wie der Cosinus OP″ des zwischen 180 und 270° fallenden Bogens negativ sey.

4) Der Bogen ABCDM‴, welcher zwischen 270° und 360° steht, einen negativen Sinus P‴M‴ und einen positiven Cosinus OP‴ habe.

Wenn man annimmt, daß ein beweglicher Punct, der von dem Punct A ausgehend, die Peripherie des Kreises ABCDA beschreibt, so bestimmt er nach und nach, durch den von ihm durchlaufenen Räume, alle mögliche Bogen, und wenn er nach A zurückkömmt, so hindert ihn nichts, seine Bewegung in dem nemlichen Sinne fortzusetzen. Kommt er also von Neuem nach M, so ist der ganze Weg den er ge-

167.

Der Ausdruck

$$r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{z}{m}\right)$$

ist dazu geeignet, nicht allein alle Wurzeln von dem Grade m einer imaginairen Formel vorzustellen, wie wir so eben gesehn haben, sondern auch die jeder beliebigen reelen Größe, sie sey positiv oder negativ; oder, was das nemliche ist, sie kann die Gleichung

$$x^m \pm a^m = 0,$$

Genüge

gemacht hat, der Bogen ABCDAM, welcher aus der Peripherie plus dem Bogen AM besteht; und den nemlichen Sinus und Cosinus wie dieser letzte hat.

Aus dem Ebengesagten folgt, daß ein Bogen, um jeden ganzen Vielfachen der Peripherie, oder, was das nemliche ist, um jeder geraden Zahl von halben Peripherien vermehrt, immer den nemlichen Sinus und Cosinus haben wird, wie in seinem primitiven Zustande: sobald er aber um einer ungeraden Zahl von halben Peripherien vermehrt würde, so würde sein Sinus und Cosinus die Zeichen ändern, obgleich sie immer den nemlichen Werth behalten.

Wenn man die halbe Peripherie durch π bezeichnet, und in den Gleichungen

$$\sin(x \pm z) = \sin x \cos z \pm \cos x \sin z$$

und

$$\cos(x \pm z) = \cos x \cos z \mp \sin x \sin z,$$

statt x successive $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ . . . setzt, und beobachtet, daß

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,\ \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,\ \sin\pi = 0,\ \cos\pi = -1,$$
$$\sin\tfrac{3}{2}\pi = -1,\ \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0\ \ldots$$

ist, so erhält man in den folgenden Formeln eine Reihe von Resultaten, in denen n eine ganze Zahl bedeutet.

sin

Genüge leisten, indem sie r und z auf eine schickliche Art bestimmt.

Wenn man annimmt, daß

$$x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{z}{m}\right)$$

sey, so wird man haben

$$x^m = r(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)$$

und, wenn man in der vorgegebenen Gleichung substituirt, erhält man

$$r\cos z + r\sqrt{-1}\,\sin z \mp a^m = 0.$$

Diese letzte wird nur dann Statt haben, wenn die imaginaire Größe, die sie enthält, sich selbst ver-

nich-

$$\sin\left(\frac{4n+1}{1}\pi \pm z\right) = +\cos z;$$

$$\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi \pm z\right) = -\sin z;$$

$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi \pm z\right) = \mp\sin z;$$

$$\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi \pm z\right) = -\cos z;$$

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi \pm z\right) = -\cos z;$$

$$\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi \pm z\right) = \pm\sin z;$$

$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi \pm z\right) = \pm\sin z;$$

$$\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi \pm z\right) = +\cos z.$$

Aus dem hier Gesagten sieht man, daß der nemliche Sinus und der nemliche Cosinus einer unendlichen Anzahl verschiedener Bogen entspricht.

nichtet. Man wird also einer Seits haben: $\sin z = 0$, und auf der andern Seite aber $r \cos z \mp a^m = 0^\circ$. Man wird der ersten Bedingung ein Genüge leisten, wenn man für z irgend einen der in dieser Folge 0π, 2π, $3\pi \ldots$ wo π die halbe Peripherie bezeichnet, enthaltnen Bogen nimmt. Die zweyte giebt

$$r = \pm \frac{a^m}{\cos z};$$

aber da r immer eine wirkliche Größe seyn soll, so muß man für z ein gerades Vielfaches von dem halben Umfang setzen, wenn der obere, und ein ungerades Vielfaches, wenn das untere Zeichen statt findet, weil man wegen

$$\cos 2n\pi = +1 \text{ und } \cos(2n+1)\pi = -1$$

immer haben wird

$$r = a^m \text{ und } r^{\frac{1}{m}} = a$$

Die allgemeine Formel der Wurzeln für die Gleichung

$$x^m - a^m = 0$$

wird daher seyn:

$$x = a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}:$$

Macht man nun zuerst $n = 0$, so hat man

$$\cos\frac{0}{m} = 1 \text{ und } \sin\frac{0}{m} = 0,$$

welches $x = a$ giebt; ferner, wenn m eine gerade Zahl ist, so kömmt man auf das Vielfache

$$n = \frac{m}{2}$$

woraus entstehet

$$\cos\pi = -1,\quad \sin\pi = 0 \text{ und } x = -a.$$

Man sieht also, daß die vorhergende Formel zu gleicher

Zeit

Zeit die reelen als auch die imaginairen Wurzeln enthält; denn man weiß, daß die Gleichung

$$x^m - a^m = 0$$

nur die einzige reele Größe x — a enthält, sobald m ungerade ist. Wenn aber m gerade ist, so hat sie deren zwey, nehmlich

$$x = + a, \quad x = - a.$$

Es ist leicht sich zu versichern, daß die Gleichung

$$x = a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}$$

noch die

$$x^m - a^m = 0,$$

Genüge leistet, und wenn man folglich eine mit der andern multiplicirt, so sind die beyden einfachen Factoren.

$$x - a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2n\pi}{m}\right\},$$

$$x - a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}.$$

Das Product

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{m} + a^2$$

wird ein Factor vom zweyten Grade der Gleichung

$$x^m - a^m = 0$$

seyn.

Die Gleichung

$$x^m + a^m = 0$$

führt zu Resultaten, welche den vorigen ähnlich sind, nur mit dem Unterschiede, daß die Vielfachen ungerade sind, statt gerade zu seyn. In diesem Falle werden die Wurzeln eine oder die andere der folgenden Formen haben:

$$x = a\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\right\}$$

$$x = a\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\right\},$$

und der Ausdruck irgend eines Factors vom zweyten Grade wird seyn

$$x^2 - 2ax\cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + a^2$$

168.

Wir wollen jetzt bey einigen Beyspielen die Formeln anwenden, welchen wir so eben gefunden haben. Es seyen 1) die beyden Gleichungen

$$x^5 - 1 = 0 \text{ und } x^5 + 1 = 0.$$

Man wird in diesen Beyspielen $a = 1$ haben; fürs erste muß man nur von den geraden Vielfachen Gebrauch machen,

$$\frac{0}{5},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5},$$

und bey der geraden Zahl verweilen, welche dem Doppelten des Exponenten vorhergeht; denn wenn man darüber hinausginge, so würde man auf Bogen zurückkommen, welche nicht anders, wie die vorhergehenden um einem Umfang vermehrt wären, und welche, indem sie respective gleiche Sinus und Cosinus haben, keine neuen Werthe geben würden. Dies festgesetzt, so würden die Wurzeln von $x^5 - 1 = 0$ seyn

$$x = \cos\frac{0^\circ}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{0^\circ}{5} = 1$$

$$x = \cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$x = \cos\frac{4\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5},$$

x=cos

$$x = \cos\frac{6\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{6\pi}{5},$$

$$x = \cos\frac{8\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{8\pi}{5}.$$

Indem man nun diese Werthe näher untersucht, so sieht man, daß der vierte sich vom dritten, so wie der fünfte sich vom zweyten, nur durch das Zeichen $\sqrt{-1}$ unterscheiden, denn weil

$\cos(\pi+z) = \cos(\pi-z)$ und $\sin(\pi+z) = -\sin(\pi-z)$,

so hat man

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5} \text{ und } \sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{4\pi}{5},$$

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} \text{ und } \sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}:$$

Die verschiednen Wurzeln der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ werden daher in folgenden drey Formeln enthalten seyn:

$$x = 1$$

$$x = \cos\frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \pm \sqrt{-1}\sin 72^\circ$$

$$x = \cos\frac{4\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ \pm \sqrt{-1}\sin 144^\circ$$

Die Bemerkung, die wir so eben gemacht haben, ist allgemein, man wird immer bey den Vielfachen von π stehen bleiben können, welche den Exponenten der Gleichung deren Wurzeln man sucht, nicht übersteigen; vorausgesetzt, daß man $\sqrt{-1}$ das Zeichen $\pm$ giebt; ich glaube aber dennoch zeigen zu müssen, wie man alle diese Wurzeln aus dem einzigen Ausdruck

$$x = a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}$$

ziehen kann. Der allgemeine Ausdruck der Factoren vom zweyten Grade giebt die drey Resultate:

$$x^2 - 2x\cos\frac{0^\circ}{5} + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1 = x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1 = x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1,$$

und da der erste dieser Ausdrücke nichts anders als das Quadrat von $x - 1$ ist, so hat man zuletzt

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1)(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1).$$

Ich gehe zu $x^5 + 1 = 0$ über, hier sind die ungeraden Vielfachen, deren man sich bedienen muß, und indem man die, welche 5 übersteigen, wegläßt, findet man, daß $x^5 + 1 = 0$ in die drey Formeln enthalten sind.

$$x = \cos\frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ \pm \sqrt{-1}\,\sin 36^\circ$$

$$x = \cos\frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{3\pi}{5} = \cos 108^\circ \pm \sqrt{-1}\sin 108^\circ$$

$$x = \cos\frac{5\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{5\pi}{5} = -1.$$

Aus dem Ausdruck der Factoren des zweyten Grades zieht man

$$x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1 = x^2 - 21\cos 36^\circ + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1 = x^2 - 2x\cos 108^\circ + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{5} + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

und man wird haben

$$x^5 + 1 = (x^2 - 2x\cos 36^\circ + 1)(x^2 - 2x\cos 108^\circ + 1)(x+1)$$

Ich

Ich werde noch die Factoren der beyden Gleichungen

$$x^6 - 1 = 0, \quad x^6 + 1 = 0$$

bestimmen. Die vom ersten Grade werden seyn

für die erste

$$x - 1$$

$$x - \left(\cos\frac{2\pi}{0} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$x - \left(\cos\frac{4\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{6}\right)$$

$$x + 1$$

für die zweyte

$$x - \left(\cos\frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x - \left(\cos\frac{3\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$x - \left(\cos\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

und die Factoren vom zweyten Grade werden seyn,

für die erste

$$x^2 - 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{6} + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{6} + 1$$

für die zweyte

$$x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{6} + 1$$

$$x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{6} + 1$$

und wir beobachten, daß

$$\cos\frac{3\pi}{6} = \cos 90^\circ = 0 \text{ und } \sin\frac{3\pi}{6} = 0.$$

169.

Die imaginairen Wurzeln der Gleichungen von der Form $x^m - 1 = 0$, werden in der Algebra stark gebraucht, wo man sie mit dem Namen: imaginaire Wurzeln der Einheit, bezeichnet; und es sind wirklich verschiedne Zusammenfügungen von algebraischen Zeichen, welche, sobald mau sie den Operationen unterwirft, durch welche man irgend eine Potenz entwickelt, die Einheit zum Resultate geben; diese Wurzeln haben unter sich in jedem Grade, sehr merkwürdige Relationen und welche leicht aus ihren allgemeinen Ausdruck abzuleiten sind.

Man hat aus dem Vorhergehenden gefunden, daß

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

sey; aber man sieht leicht, daß

$$\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m} = \left(\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n$$

(Einl. Num. 41)

wenn man daher durch x' die Wurzel bezeichnet, welche die Formel

$$\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}$$

giebt, und die man zuerst findet, so erhält man alle andern, indem man die verschiednen Potenzen x'^2, x'^3, x'^4, bildet.

Diese Eigenschaft findet man nicht bloß in der Wurzel, welche wir durch x' bezeichnet haben, denn, wenn man irgend ein Vielfaches p von dem Bogen $\frac{2n\pi}{m}$ nimmt, so hat man ebenfalls

cos

$$\cos\frac{2np\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2np\pi}{m}\sqrt{-1}$$
$$=\left[\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right]^p,$$

und zu gleicher Zeit wird der Ausdruck

$$\cos\frac{2np\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2np\pi}{m}$$

in einer der Wurzeln der gegebnen Gleichung enthalten seyn, weil der Bogen $\frac{2np\pi}{m}$ immer nur die Summe einer gewissen Anzahl von halben Peripherien, und eines der zwischen $\frac{2\pi}{m}$ und π enthaltenen Bogen ist.

Das nemliche kann auf eine sehr einfache Art, ohne Hülfe vom Sinus und Cosinus bewiesen werden. Denn wenn man annimmt, daß x' irgend eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ bezeichnet, so erhält man

$$x'^m = 1,\quad x'^{2m} = 1,\quad x'^{3m} = 1;$$

$$\text{und } x'^{2m} = (x'^2)^m,\quad x'^{3m} = (x'^3)^m \text{ etc.}:$$

woraus folgt, daß die verschiednen Potenzen x'^2, x'^3 etc. ebenfalls der vorgegebnen Gleichung befriedigen. Die Zahl der verschiednen Wurzeln, welche man auf diese Weise erhalten würde, kann nicht m übersteigen; denn sobald man zu x'^m gekommen, ist, findet man die Einheit wieder, und es kömmt hernach

$$x'^{m+1} = x',\quad x'^{m+2} = x'^2 \text{ etc.}$$

Die Gleichung

$$x^m + 1 = 0$$

würde zu Resultaten führen, die den vorhergehenden analog wären, mit diesem Unterschiede, daß man nur ungerade Potenzen von irgend einer der Wurzeln anwenden dürfte;

men dürfte; wie man leicht aus den für diesen Fall im vorigen Artikel gegebnen allgemeinen Ausdruck sehn wird, oder indem man bemerkt, daß, da $x^m = -1$, ist, man nur dann

$$(x'^m)^n = (x'^n)^m = -1$$

haben kann, wenn man für n eine ungerade Zahl nimmt.

170.

Die Erforschung der imaginairen Wurzeln der Gleichungen $x^m \mp 1 = 0$, hängt, wie man sieht, von der Division der Peripherie des Kreises in eine Anzahl m von gleichen Theilen, oder von der Beschreibung eines regulären Polygons von m Seiten ab. Jedesmal, wenn der Exponent m in einer der Progressionen

$$\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}, \quad \div\, 3 : 6 : 12 : 24 \text{ etc.},$$
$$\div\, 5 : 10 : 20 : 40 \text{ etc.}$$

enthalten seyn wird, kann man diese Operation mit dem Linial und dem Zirkel ausführen, oder gerade zu die Ausdrücke der Sinus oder Cosinus der Bogen $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, etc. $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$, etc. berechen, wo denn nur quadratische Wurzelgrößen hineinkommen.

171.

Allgemein, wenn m und m' zwey Primzahlen unter sich sind, und man weiß die Gleichungen

$$x^m \mp 1 = 0, \quad x^{m'} \mp 1 = 0,$$

aufzulösen, so würde man auch die Gleichung

$$x^{mm'} \mp 1 = 0$$

auf-

aufzulösen wissen, denn indem man $x^m = y$ annimmt, erhält man $y^{m'} \mp 1 = 0$, und sobald man durch α irgend eine der Wurzeln dieser letzten Gleichung bezeichnet, hat man hernach $x^m = \alpha$, wo $x^m - \alpha = 0$ ist, ein Resultat, welches man auf die Form $t^m - 1 = 0$ zurückführen kann, indem man $t\sqrt[m]{\alpha} = x$ macht.

Man kann zu dem Ausdruck der Wurzeln der Gleichung $x^{mm'} \mp 1 = 0$ gelangen, indem man nur die Sinus und Cosinus der Bogen, welche aus den Divisionen der halben Peripherie und ihrer Vielfachen, in m und m′ gleiche Theile entstehn anwendet. Um dies zu beweisen wollen wir sogleich die Gleichung $x^{mm'} - 1 = 0$ betrachten. Wenn wir von der Gleichung $x^m - 1 = 0$ und $x^{m'} - 1 = 0$ zwey Wurzeln unter sich multipliciren, so haben wir

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right)\left(\cos\frac{2n'\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n'\pi}{m'}\right)$$

$$= \cos 2\left(\frac{nm'+n'm}{nm'}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2\left(\frac{nm'+n'm}{nm'}\right)\pi$$

Indem wir dies Resultat mit dem Ausdruck

$$\cos\frac{2n''\pi}{nm'} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n''}{nm'}$$

vergleichen, welches die Wurzeln von $x^{mm'} - 1 = 0$ vorstellt, so sieht man daß beyde auf das nemliche zurückführen, wenn $nm' + n'm = n''$ ist. Da aber m und m′ Primzahlen unter sich sind, so folgt aus der Theorie der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade, daß man für n und n′ immer Zahlen finden wird, welche der obigen Gleichung entsprechen.

Man bemerke, daß, wenn man $n'' = 1$ macht, so kömmt

$$\cos 2\left(\frac{n'm' + n'm'}{nm'}\right)\pi = \cos\frac{2\pi}{mm'},$$

$$\sin 2\left(\frac{n'm' + n'm'}{nm'}\right)\pi = \sin\frac{2\pi}{mm'},$$

und man wird folglich den Sinus und Cosinus des Bogens finden, welcher das Resultat der Division der Peripherie in eine Anzahl mm' von gleichen Theilen ist, wenn die des Bogen $\frac{2\pi}{m}$ und $\frac{2\pi}{m'}$, gegeben sind, und man wird n und n' nach der Gleichung $nm' + n'm = 1$ bestimmt haben.

Die Gleichung $x^{mm'} + 1 = 0$ führt zu analogen Resultaten. Man wird in diesem Falle haben

$$\left\{\cos\left(\frac{2n+1}{m}\right)\pi \pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n+1}{m}\right)\pi\right\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{2n'+1}{m'}\right) \pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n'+1}{m'}\right)\pi\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{(2n+1)m' + (2n'+1)m}{mm'}\right)\pi$$

$$\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{(2n+1)m' + (2n'+1)m}{mm'}\right)\pi$$

$$= \cos\left(\frac{2n''+1}{mm'}\right)\pi \pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n''+1}{mm'}\right)\pi,$$

woraus man folgert

$$(2n+1)m' + (2n'+1)m = 2n'' + 1.$$

172.

Die Gleichungen von der Form

$$x^{2m} - 2px^m + q = 0,$$

kön=

können wie diejenigen behandelt werden, die nur zwey Glieder enthalten. Indem man sie nach Art des zweyten Grades auflöset, zieht man daraus

$$x^m = p \pm \sqrt{p^2 - q}:$$

so lange p^2 größer als q ist, sind die Werthe von x^m reel, und indem man sie durch α und β vorstellt, hat man die beyden Gleichungen

$$x^m - \alpha = 0, \text{ und } x^m - \beta = 0,$$

woraus man die imaginairen Wurzeln nach den Formeln der 167. Num. findet.

Wenn man $p^2 < q$ hat, so giebt man dem Werthe von x^m die Form

$$p \pm \sqrt{q - p^2} \cdot \sqrt{-1},$$

und indem man $q = a$, und $\sqrt{q - p^2} = b$, macht, so kömmt $x^m = a + b\sqrt{-1}$, man braucht dann nur aus dem Ausdruck $a \pm b\sqrt{-1}$ eine Wurzel vom Grade m zu ziehen. Wenn man die Formeln von Num. 166 wieder vornimmt, so findet man daraus

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}, \cos z = \frac{a}{r} = \frac{p}{\sqrt{q}}$$

und der allgemeine Ausdruck der gesuchten Wurzel wird seyn

$$r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{2n\pi + z}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi + z}{m}\right).$$

Wenn man von den einfachen Factoren einen durch den andern multiplicirt

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{2n\pi + z}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi + z}{m}\right),$$

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{2n\pi + z}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi + z}{m}\right),$$

 so

so stellt das Product

$$x^2 - 2r^{\frac{1}{m}} x \cos \frac{2n\pi + z}{m} + r^{\frac{2}{m}}$$

alle Factoren vom zweyten Grade vor, welche die gegeb- Gleichung haben kann, und man wird bemerken, daß, wenn man in dieser Gleichung r^2 anstatt q, und $r \cos z$ statt p setzt, dieselbe

$$x^{2m} - 2rx^m \cos z + r^2 = 0$$

wird. Indem man $r = 1$ annimmt, hat man

$$x^{2m} - 2x^m \cos z + 1 = 0,$$

und die Formel der Factoren vom zweyten Grade würde seyn

$$x^2 - 2x \cos \frac{2n\pi + z}{m} + 1.$$

Diese Hypothese vermindert die Allgemeinheit der Resultate nicht im Geringsten, denn wenn man

$$x = \frac{y}{\alpha},$$

macht, so kömmt die Gleichung

$$y^{2m} - 2\alpha^m y^m \cos z + \alpha^{2m} = 0,$$

welches man immer mit

$$y^{2m} - 2Py^m + Q = 0$$

vergleichen kann, vorausgesetzt, daß

$$P^2 < Q$$

sey. In Allem Vorhergehenden würde dadurch nichts geändert werden, wenn der Coefficient p negativ wäre, nur der Bogen z würde dann mehr als 90° betragen.

173.

Die Auflösung der Gleichung $x^m \pm a^m = 0$, welche in Num. 167 gegeben ist, und die uns die Factoren von der

der Größe $x^m \mp a^m$ bekannt gemacht hat, wird uns das Mittel an die Hand geben, die schöne Eigenschaft des Kreises zu demonstriren, welche das Theorem des Cotes enthält, und so lautet.

Wenn man den Umfang eines Kreises, der mit einem Halbmesser $= a$ beschrieben ist, in eine Anzahl $2m$ von gleichen Theilen M_1, M_2, M_2, M_3 etc. (Fig. 12) theilt, und von einem auf dem Diameter MCM_5 gelegnen, von dem Mittelpunct C und $OC = x$ entfernten Puncte nach, von verschiednen Theilungspuncten die geraden Linien OM, OM_1, OM_2, OM_3, ... zieht, so wird das Product von allen denen, welche mit den durch eine gerade Zahl bemerkten Theilungspuncten correspondiren gleich $a^m - x^m$ seyn, wenn der Punct O innerhalb des Kreises, und gleich $x^m - a^m$, wenn er außerhalb des Kreises liegt. Die geraden Linien, welche nach den ungeraden Theilungspuncten geführt werden, geben, wenn man sie unter sich multiplicirt, die Größe $a^m + x^m$.

Ich will nur den Fall beweisen, wo O innerhalb des Kreises liegt, weil es leicht seyn wird, den andern auf eben die Art zu beweisen. Wenn man von dem Puncte M_1 die Perpendiculaire M_1P auf den Diameter MM_5 fallen läßt, so hat man aus dieser Construction

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM_1}^2;$$

aber PM_1 stellt den Sinus des Bogens MM_1 in dem Kreise dessen Radius $= a$ ist, vor, und CP ist der Cosinus. Man wird daher nach den Sinustafeln, die für den Radius $= 1$ berechnet sind, haben

PM

$PM = a \sin MM_1$, $CP = a \cos MM_1$, $OP = QP - CO$
$= a \cos MM_1 - x$,

und endlich

$$\overline{OM}_1^2 = a^2 - 2ax \cos MM_1 + x^2:$$

Die Werthe von OM_2, OM_3 ... erhält man, indem man die für OM_1 gefundnen Bogen MM_2, MM_3 ... dem Bogen MM_1 substituirt. Wenn man nur die nimmt, welche den geraden Theilungspuncte entsprechen, und die halbe Peripherie immer durch π bezeichnet, so kömmt

$$MM^2 = \frac{2\pi}{m}, \; MM_4 = \frac{4\pi}{m};$$

daraus

$$\overline{OM}_2^2 = a^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{m} + x^2,$$

$$\overline{OM}_4^2 = a^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{m} + x^2 \ldots$$

Aber die Linien OM_2, OM_4 ... welche auf einer Seite des Diameters liegen, haben ihre correspondirenden OM_8, OM_6 auf der andern Seite, die ihnen respective gleich sind, so daß man schreiben kann $OM_2 \times OM_8$, anstatt $\overline{OM}_2^2$; $OM_4 \times OM_6$ statt $\overline{OM}_4^2$ und so fort, wenn die Divisionen in größerer Zahl wären. Man bemerke zu gleicherer Zeit, daß die Linien OM die Größe $a - x$ vorstellt. Dies festgesetzt, so folgt aus Num. 168 daß m ungrade ist,

$$a^m - x^m = (a - x)\left(a^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{m} + x^2\right)$$
$$\left(a^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{m} + x^2\right) \ldots$$

indem man statt der Factoren der zweyten Hälfte ihre Ausdrücke in Linien setzt, so hat man

$a^m -$

$$a^m - x^m = OM \times OM_2 \times OM_4 \times OM_6 \times OM_8.$$

Da die Bogen MN_1, MN_3, MM_5 . . ., welche den ungraden Theilungspuncten correspondiren, gleich sind

$$\frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{m}, \quad \frac{6\pi}{m} = \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{10\pi}{2m} = \frac{5\pi}{m} \ldots$$

so findet man

$$\overline{OM}_1^2 = a^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + x^2,$$

$$\overline{OM}_3^2 = a^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + x^2 \ldots$$

und $OM_5 = a + x$; aber da man

$$a^m + x^m = (a + x)\left(a^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + x^2\right)$$

$$\times\left(a^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + x^2\right) \ldots$$

hat, so erhält man

$$a^m + x^m = OM_1 \times OM_3 \times OM_5 \times OM_7 \times OM_9.$$

Da m eine grade Zahl ist, wie in Fig. 3, so entsprechen die beyden Theile OM und OM_6 des Diameters der eine sowohl als der andere, den mit einer graden Zahl bezeichneten Theilungspuncten, und geben die beyden Factoren $a - x$, und $a + x$, welche die Größe $a^m - x^m$ in diesem Falle hat.

174.

Cotes der sehr jung starb, hinterließ in seinen Papieren das vorhergehende Theorem ohne Beweis. Moivre und Bernoulli ersetzten solchen, aber der erstere gab dem Theoreme eine Erweiterung vermittelst welcher er die Zerlegung des Ausdrucks

$$a^{2m} - 2a^m x^m \cos z + x^{2m}$$

in

in reele Factoren vom zweyten Grade bewirkte. Hier folgt diese Erweiterung.

Anstatt den Punkt M, als den Ursprung der Division des Kreises am Ende des Halbmessers OC, zu nehmen, nimmt man zuerst einen Bogen AM Fig. 4, welche der mte Theil des Bogens z seyn mag, und durch AB vorgestellt wird; nachgehends theilt man den Umfang des Kreises in m gleiche Theile, indem man vom Punkt M anfängt, und erhält alsdann

$$a^{2m} - 2a^m x^m \cos z + x^{2m} = \overline{AC}^{2m} - 2\overline{AC}^m \times \overline{OC}^m . \cos z$$
$$+ \overline{OC}^{2m} = \overline{OM}^2 \times \overline{OM_1}^2 \times \overline{OM_2}^2 \times \overline{OM_3}^2 \times \overline{OM_4}^2 \text{ u. s. w.}$$

Um sich von der Wahrheit dieser Gleichung zu versichern, muß man beobachten, daß

$$AM = \frac{z}{m}, \quad AM_1 = \frac{2\pi + z}{m}, \quad AM_2 = \frac{4\pi + z}{m} \text{ u. s. w.}$$

und wie in der vorhergehenden Nummer, den Werth von $\overline{OM}^2$, $\overline{OM_1}^2$, u. s. w. suchen; man wird durch dieses Mittel die nemlichen Factoren finden, wie diejenigen sind, welche die Formeln von Num. 172 für den Ausdruck

$$a^{2m} - 2a^m x^m \cos z + x^{2m}$$

geben würden.

175.

Die Anwendung der Formeln von Num. 166 führt uns zu einem sehr einfachen Ausdruck der Wurzeln von der Gleichung des 3ten Grades, in dem irreductibeln Falle. Man weiß daß die erste Wurzel der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0,$$

$$x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$-\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} \text{ ist,}$$

und daß sie sich dem Scheine nach, unter einer imaginairen Gestalt darstellt, wenn $\frac{1}{27}p^3$, sollte $\frac{1}{4}q^2$ übertreffen. Wenn man

$$\frac{q}{2} = a$$

und

$$\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2} = b$$

macht, so wird man

$$x = -(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

bekommen, und man wird finden

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}, \cos z = \frac{a}{r} = \frac{q}{2\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}},$$

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{z}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{z}{3}\right)$$
$$= \left(\cos\frac{z}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{z}{3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}p};$$

woraus

$$x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{z}{3}, \quad x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi + z}{3},$$
$$x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{4\pi + z}{3}$$

entstehen wird, und wegen

$$\cos\frac{4\pi + z}{3} = \cos\frac{2\pi - z}{3},$$

kann der letzte dieser Werthe, so geschrieben werden:

x = —

$$x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi - z}{3}.$$

Wir sind zu gleicher Zeit zu den drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

gekommen, und dieses wird diejenigen nicht wundern, die da wissen, daß der Ausdruck der ersten Wurzel von der wir ausgegegangen sind, sie alle implicite, wegen der cubischen eingebildeten Wurzeln der Einheit, die darinn als befindlich mit gedacht werden, enthält. Die andern können sich von der strengen Richtigkeit unserer Schlüsse überzeugen, indem sie, in denen bekannten Ausdrücken, der beyden letztern Wurzeln, die vorhin gefundene Werthe für die cubischen Radicalien, welche sich in den erstern Werth einschleichen, substituiren; sie werden haben

$$2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\tfrac{1}{2}\cos\frac{z}{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\frac{z}{3}\right)$$

$$2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\tfrac{1}{2}\cos\frac{z}{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\frac{z}{3}\right)$$

und wenn man sich erinnert, daß

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\tfrac{1}{2} \text{ und}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

so werden sie die vorhergehenden Ausdrücke in

$$-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi + z}{3} \text{ und } -2\sqrt{\tfrac{1}{4}p}\cos\frac{2\pi - z}{3}.$$

verwandeln.

176.

Man wird eben so finden, daß der allgemeine Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}}$$

immer reel ist, und sein Werth

$$r^{\frac{1}{m}} \cos \frac{z}{m}$$

ist. Man würde die Gleichung von welcher er abhängt bilden, indem man den cosinus des mten Theils eines gegebenen Bogens suchte. In der That, es sey $mx = z$, so wird man $x = \frac{z}{m}$ bekommen, und wegen Num. 40. der Einleitung, wird man finden

$$\cos z = \left(\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{m}\right)^m + \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{z}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{z}{m}\right)^m;$$

wenn man diese Gleichung entwickelt, indem man $\frac{a}{r}$ in der Stelle von $\cos z$ setzt, und

$$\cos\frac{z}{m} + \frac{r^{-\frac{1}{m}}}{2}y,\ \sin\frac{z}{m} = \sqrt{1 - 4r^{-\frac{2}{m}}y^2}$$

macht; so wird daraus die Gleichung entstehen, welche y in a geben soll: man hat aber auch durch erwähnte Num.

$$\cos\frac{z}{m} = \tfrac{1}{2}(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{m}} + \tfrac{1}{2}(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{m}}$$

also

$$y = \sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[m]{a - b\sqrt{-1}}.$$

Es gehört nicht zu meinem Gegenstande die Gleichungen abzuhandeln, welche aus der Division, eines in einer beliebigen Anzahl gleicher Theile getheilten Kreisbogens, entstehen; da sie aber wegen ihrer Gestalt und Eigenschaften sehr merkwürdig sind, so habe ich solche wenigstens den Leser anzeigen wollen.

177.

Da die Kenntniß der eingebildeten Wurzeln der Gleichungen, für einen wichtigen Zweig des Integralcalculs nothwendig ist, so halte ich es für nöthig mich über diese Materie noch in einigen Details einzulassen.

Es ergiebt sich aus dem erwiesenen Lehrsatz Nr. 163, daß umdie eingebildeten Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung zu erhalten, man solche in Factoren vom zweytenGrade zerlegen muß. Aber dieses Mittel ziehet große Unbequemlichkeiten nach sich, indem es die Auflösung einer Gleichung vom Grade $\frac{m(m-1)}{2}$ erfordert, ehe man selbst noch wissen kann, ob die vorgegebene vom Grade m, eingebildete Wurzeln hat oder nicht. Die Geometer haben Methoden gesucht, welche ihnen die Anzahl dieser Wurzeln anzeigen könnten, unabhängig von der Auflösung einer Gleichung, und ich werde vortragen was Lagrange zum allgemeinsten in dieser Rücksicht gefunden hat.

Es sey α, β, γ, δ, etc. die Wurzeln einer Gleichung vom Grade m, unter welchen sich verschiedene eingebil-

dete

dete befinden, diese letztern sind nothwendigerweise paarweise, und von der Form

$$a \pm b\sqrt{-1} \quad a' \pm b'\sqrt{-1}.$$

Wenn man die Unterschiede der Wurzeln von dieser Gleichung nimmt, so könnten sie nur eine von den folgenden Formen seyn:

$$a - \beta, \quad \alpha - a \mp b\sqrt{-1}, \quad a - a' \pm (b - b')\sqrt{-1},$$
$$2b\sqrt{-1}.$$

Macht man die Quadrate von diesen Ausdrücken, so wird man für den ersten ein reeles und positives und für den vierten ein reeles und negatives Resultat finden; die beyden anderen werden eingebildete Resultate geben, wenn man nicht wenigstens in einigen Fällen $b = b'$ hat, a und a′ bleiben ungleich; ob es aber gleich geschieht, so wird nur das Quadrat von dem Unterschiede zwischen den zwey eingebildeten Wurzeln, welche zusammen gehören, negativ seyn. Es folgt daraus, daß die Gleichung von welcher die Wurzeln die Quadrate der Unterschiede, die sich unter diejenigen von der vorgegebenen befinden, seyn würden, eben so viele negative Wurzeln hat, als diese letztere Paare eingebildete Wurzeln hat.

Man kann die Gleichung hervorbringen, welche die Quadrate der Unterschiede zwischen die Wurzeln der Vorgegebenen giebt, und welche ich die Gleichung (D) nennen werde, indem man nach dem Verfahren in Nr. 160, das Produkt der Factoren

$$z - (\alpha - \beta)^2, \quad z - (\alpha - \gamma)^2, \quad z - (\beta - \gamma)^2, \ldots$$

entwickeln werde, und nachher gleich Null setzt.

178.

Hätte man eine sichere Regel zu beurtheilen wie viel negative Wurzeln die Gleichung (D) hat, so wüßte man dadurch wieviel Paare von imaginairen Wurzeln die vorgegebene Gleichung enthält: Unglücklicherweise bietet die Analysis kein unfehlbares Mittel dar diesen Gegenstand zu erfüllen. Dennoch hat Descartes erkannt daß eine beliebige Gleichung soviel positive Wurzeln haben könnte, als Aenderungen der Zeichen von + in — oder von — in + in der Folge der Glieder woraus sie bestehet vorkommen, und soviel negative Wurzeln, als Folgen desselben Zeichen darin sind. Dieser Satz, dessen Wahrheit zuerst bestritten würde, ist durch de Gua vollständig bewiesen, und kann deutlicher und allgemeiner folgendermaaßen vorgetragen werden:

Jede Gleichung kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als sich Zeichen-Abwechselungen zwischen ihren Gliedern finden, und nicht mehr negative Wurzeln, als sich Folgen desselben Zeichen finden, und wenn die Gleichung nur reele Wurzeln enthielte, so würde sie davon ganz genau soviel positive haben, als sie Abwechselungen der Zeichen hat, und so viel negative, als sie Folgen desselben Zeichen hat.

Dieses Theorem, welches wir weiter unten beweisen werden, läßt uns sehen, daß, wenn die Glieder der Gleichung (D) wechselsweise positiv und negativ sind, d. h. weun sie keine Folge desselben Zeichen hat, sie keine andere als reele und positive Wurzeln haben wird, weil ihrer Natur nach, sie keine imaginäire Wurzeln haben kann, ohne zu gleicher Zeit Wurzeln zu haben die negativ

tiv sind; und man schließt daraus, daß alle Wurzeln der vorgegebenen Gleichung in diesem Falle reel seyn werden.

Ferner, wenn in der Gleichung (D) das letzte Glied, welches, wie man weiß, das Product aus allen Wurzeln ist, negativ ist, so wird sie eine gerade oder ungerade Anzahl von negativen Wurzeln haben, je nachdem sie von ungeraden oder geraden Grade seyn wird, denn das Product $A^2 + B^2$ eines Paars von imaginairen Wurzeln $A \pm B\sqrt{-1}$, ist immer positiv. Im ersten Falle wird die vorgegebene Gleichung eine gerade Anzahl Paare von imaginairen Wurzeln haben, und im zweyten Falle eine ungerade Anzahl Paare. Allgemein, die vorgegebene Gleichung wird nicht mehr Paare von imaginairen Wurzeln haben können, als sich Folgen desselben Zeichen, zwischen den Gliedern der Gleichung (D) finden.

Die vorstehenden Betrachtungen führen nur noch erst dahin, sich zu versichern, ob eine gegebene Gleichung imaginaire Wurzeln hat, und eine Grenze zu finden, die ihre Anzahl nicht übersteigen kann; folgen wir aber den Geist der Methode, so machen wir neue Hülftgleichungen, die keine negative Wurzeln haben könnten, in so fern die vorgegebene Gleichung wenigstens vier negative Wurzeln haben wird, andere Hülfsgleichungen die nur positive Wurzeln haben werden, insofern die Anzahl der imaginairen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung unter 6 wäre, u. s. w.

Im ersten Falle müßte man, die Gleichung suchen, welche das Quadrat des Unterschiedes zwischen der Summe von zwey beliebigen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung, und die Summe der beyden andern ohne Auswahl genommenen, giebt; im zweyten Falle, die Gleichung welche das Quadrat des Unterschiedes zwischen der Sum-

me von drey beliebigen Wurzeln, und die Summe von drey andern ohne Auswahl genommenen Wurzeln, und so weiter.

179.

Wenn man auf irgend eine Art dahin gelangte, die negativen Wurzeln der Gleichung (D) zu finden, so würde man den Ausdruck der imaginairen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung daraus ableiten. In der That, wenn man in dieser letztern $a + b\sqrt{-1}$ anstatt x substituirt, den reelen und imaginairen Theil jeden besonders gleich Null setzt, so wird man zwey Gleichungen haben um die unbekannten Größen a und b zu bestimmen. Wüßte man aber den Werth von b a priori, und setzte ihm in einer oder der andern dieser Gleichungen, so müßten die zwey Resultate durch den nemlichen Werth von a befriedigt seyn, und diese Resultate hätten nothwendig einen gemeinschaftlichen Factor, welcher a zum ersten, zweyten, oder zum dritten u. s. w. Grade erhoben enthalten würde, je nachdem daß der Werth von b einem, oder zwey, oder drey, u. s. w. Werthe von a entspräche; da nun das Quadrat von der Differenz zwischen den beyden imaginairen Wurzeln, die in der Formel $a \pm b\sqrt{-1}$ enthalten sind, $-4b^2$ ist, so wird die Größe b die Hälfte von dem Quadrat der Wurzel, des durch die Gleichung (D) gegebenen Resultat positiv genommen seyn: sucht man also zwischen den genannten beyden Gleichungen den größten gemeinschaftlichen Theiler, so wird man, indem man sie gleich Null setzt, die Gleichung haben die a bestimmen soll.

180.

Die Gleichung (D) hat auch andere nützliche Eigenschaften. Man sieht z. B. daß ihr letztes Glied allemal verschwinden wird, wenn die gegebne Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, weil in diesem Falle eine der Größen $(\alpha - \beta)^2 = 0$ werden wird. Wenn die vorgegebene Gleichung zwey gleiche Wurzeln hatte, weil alsdann darin drey von den Größen $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$, $(\beta - \gamma)^2$ u. s. w. da sind, welche sich aufheben würden, so verlöre die Gleichung (D) ihre drey letzten Glieder. Allgemein: Eine Anzahl n von gleichen Wurzeln in der gegebnen Gleichung wird $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder in der Gleichung (D) vernichten, welche dadurch ein Mittel darbietet, das Daseyn der Wurzeln zu erkennen. Wir werden uns diese Gelegenheit bedienen, um zu zeigen, wie der Differentialcalcul das nemliche Ziel mit eben so viele Zierlichkeit als Leichtigkeit erreicht.

Eine Gleichung $P = 0$, welche gleiche Wurzeln hat, ist nothwendigerweise von der Form:

$$P = X(x - \alpha)^n = 0,$$

und es folgt aus dem Nr. 133 Gesagten, daß alle Differentialen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$ bis $\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$ verschwinden werden, wenn man $x = \alpha$ annimmt, weil sie den Factor $(x - \alpha)$ enthalten werden, welcher in der ersten zur Potenz $n - 1$, in der zweyten zur Potenz $n - 2$, u. s. f. erhoben seyn wird.

Die Gleichungen

$$P = 0 \quad \frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{d^2P}{dx^2} = 0 \ldots \quad \frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} = 0,$$

werden also zu gleicher Zeit statt haben; und wenn man den gemeinschaftlichen Divisor zwischen der ersten und zweyten sucht, so wird man den Factor $(x - \alpha)^{n-1}$ haben.

Diese Betrachtungen würden leicht auf den Fall anwendbar seyn, wo die gegebne Gleichung verschiedne Arten von gleichen Wurzeln enthielte, d. h. wenn sie von der Form

$$X(x - \alpha)^n (x - \beta)^p \text{ etc.} = 0$$

wäre; ihr erstes Differential würde also hier

$$(x - \alpha)^{n-1} (x - \beta)^{p-1} \text{ etc.}$$

zum gemeinschaftlichen Factor haben.

181.

Unter den verschiednen Demonstrationen, die man von der Cartesianischen Regel gegeben hat, von welche ich Num. 178 Gebrauch gemacht habe, werde ich die von Segner wählen, (*) weil sie mir von allen die einfachste schien. Zur Abkürzung, will ich unter dem allgemeinen Namen Abwechselung die Aenderung der Zeichen, es sey nun von + in —, oder — in +, so wie unter dem Ausdruck, Folge, jede Succession des nemlichen Zeichens begreifen.

Es sey die Gleichung

$$x^m \pm Px^{m-1} \pm Qx^{m-2} \ldots \pm Tx \pm U = 0,$$

gegeben, wo die Zeichen + und — sich auf irgend eine Art folgen. Indem man sie mit dem Factor $x - \alpha$ mul-

*) Sie findet sich in den Memoiren der Berliner Akademie v. J. 1756. Seite 292.

multiplicirt, welcher die positive Wurzel $x = \alpha$ giebt, erhält man

$$x^{m-1} \left.\begin{matrix} \pm P \\ -\alpha \end{matrix}\right\} x^{m} \left.\begin{matrix} \pm Q \\ \mp P\alpha \end{matrix}\right\} x^{m-1} \ldots \left.\begin{matrix} \pm U \\ \mp T\alpha \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} \\ \mp U\alpha \end{matrix}\right\} = 0$$

Die in der ersten Zeile dieses Resultats stehenden Coefficienten sind die von der gegebnen Gleichung mit dem nemlichen Zeichen genommen, womit sie von Anfang behaftet waren. Die in der zweyten Zeile, sind von die in der ersten, mit α multiplicirt, gebildet, aber mit einem entgegengesetzten Zeichen, und ein Glied weiter rechts gerückt. Ist dies festgesetzt, so folgt, daß, sobald die obern Coefficienten größer als die untern sind, sie das Zeichen des Gliedes, in welchem sie sich befinden bestimmen; und da ihre Zeichen unverändert sind, so haben sie auch unter sich die nemlichen Abwechselungen und Folgen, wie in der gegebnen Gleichung; aber da das letzte Glied $\mp U\alpha$ immer ein dem Zeichen des vorletzten obern Coefficienten $\pm U$ entgegengesetzt ist, so entsteht daraus eine neue Abwechselung, welche die vorgegebene Gleichung noch nicht hatte.

Wenn man auf einen untern Coefficienten kömmt, dessen Zeichen dem seines correspondirenden obern entgegengesetzt und welcher größer als dieser obere ist, so erhält man eine Folge der gegebnen Gleichung, welche sich in eine Abwechselung ändert; denn da das Zeichen des Gliedes, wo dies geschieht, durch das des untern Coefficienten bestimmt sind, wird dem Zeichen des vorhergehenden Gliedes entgegengesetzt seyn, welches man für das nemliche als das seines obern Coefficienten annimmt.

Man wird die Wahrheit dieser Behauptung fühlen, wenn man beobachtet, daß man nur genöthigt ist, sich des untern Coefficienten zu bedienen, wenn man

das Zeichen eines Gliedes kennen will, wie in Fällen, welche einen der beyden folgenden ähnlich sind:

$$+ Rx^{m-3} + \left.\begin{matrix} S \\ - R\alpha \end{matrix}\right\} x^{m-4}, \qquad - Rx^{m-3} - \left.\begin{matrix} S \\ + R\alpha \end{matrix}\right\} x^{m-4},$$

und wenn man annimmt, daß $\alpha R > S$, so wird die Ordnung der Zeichenfolge in dem ersten + —, im zweyten — + seyn. Ich habe den untern Coefficienten im ersten Gliede nicht hingesetzt, weil er nach der Hypothese keinen Einfluß auf das Zeichen dieses Gliedes hat.

Es ist daher evident, daß jedesmal, sobald man von der obern Zeile zur untern hinabsteigt, um das Zeichen zu bestimmen, eine Abwechselung entstehn wird, welche nicht in der gegebnen Gleichung vorhanden war, und wenn man, nach diesem Uebergang immer in der untern Zeile bleibt, so findet man die nemlichen Abwechselungen und Folgen wieder, die in der gegebnen Gleichung sind, weil die Coefficienten dieser Zeile immer ein ihrem ersten Zeichen entgegengesetztes Zeichen haben. Wenn man von der untern Linie zur obern geht, so kann man eine Abwechselung oder eine Folge erhalten; denn es herrscht keine Connexion zwischen dem Zeichen eines niedern Coefficienten und dem des höhern Coefficienten vom folgenden Gliede. Wenn man aber annimmt, daß dieser Uebergang in allen Fällen eine Folge verschaffte, da das letzte Glied der neuen Gleichung einen Theil der zweyten Linie ausmacht, so müßte man zum wenigsten einmal öfter in diese Linie als in die erste zurückkommen, und folglich wird die neue Gleichung wenigstens eine Abwechselung der Zeichen mehr als die gegebne haben. Eben so verhält es sich mit jeder positiven Wurzel, die man einführt.

Man

Man multiplicire jetzt die vorgegebne Gleichung durch den Factor $x + \alpha$, welcher die negative Wurzel $x = -\alpha$ giebt, wir werden dann haben.

$$x^{m+1} \left.\begin{matrix}\pm P\\ +\alpha\end{matrix}\right\} x^m \left.\begin{matrix}\pm Q\\ \pm P\alpha\end{matrix}\right\} x^{m-1} \ldots \left.\begin{matrix}\pm U\\ \pm T\alpha\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}\\ \pm U\alpha\end{matrix}\right\} = 0$$

Die in der ersten Zeile stehenden Coefficienten sind hier noch dieselben, und haben das nemliche Zeichen, als in der gegebnen Gleichung; die der zweyten Zeile sind auch von denen der ersten Zeile, mit α multiplicirt, und eine Stelle nach der rechten gerückt, gebildet; aber in gegenwärtigem Falle haben sie das ursprüngliche Zeichen beybehalten.

Wenn man wie oben raisonnirt, so wird man sehn, daß man jedesmal, wenn man das Zeichen des untern Coefficienten zu nehmen genöthigt ist, eine neue Folge erhalten würde, welche in der gegebnen nicht enthalten war. Die hier angeführten Beyspiele,

$$+ Rx^{m-3} \left.\begin{matrix}-S\\ +\alpha R\end{matrix}\right\} x^{m-4}, \qquad - Rx^{m-3} \left.\begin{matrix}+S\\ -\alpha R\end{matrix}\right\} x^{m-4},$$

die den weiter oben gegebenen analog sind, werden diese Folgerungen noch evidenter machen, weil, da αR größer als S ist, man in einem $+\,+$ im andern $-\,-$ haben wird. Wenn man von der untern Zeile in die obere steigt, so wird man ohne Unterschied eine Folge oder Abwechselung erhalten können. Aber indem man festsetzt, daß immer eine Abwechselung Statt haben solle, so wird man dessen ungeachtet schließen können, daß die Zahl der Folgen wenigstens um eine Einheit vermehrt seyn wird; weil das letzte Glied, indem es sich in der zweyten Linie befindet, immer in diese Linie wenigstens einmal öfter als in die andere zurückkehren muß. Es folgt daraus, daß jede der vorgegebnen Gleichung zuge-

eigne-

eignete Wurzel wenigstens eine Folge mit sich bringen.

Indem man diese Schlußfolge mit der vorhergehenden zusammenhält, sieht man, wie wir in Num. 178 behauptet haben, daß die Zahl der positiven Wurzeln irgend einer Gleichung, nicht die der Zeichen-Abwechselung übertreffen kann, welche sie in sich enthält. Das nemliche gilt von den negativen Wurzeln, und den Folgen. Wenn die vorgegebne Gleichung bloß reele Wurzeln hat, so wurde man hierdurch auch beweisen, daß sie genau eben so viel positive Wurzeln als Abwechselungen, und eben so viel negative Wurzeln als Folgen hat; denn wie groß auch die Zahl der Abwechselungen und Folgen sey, welche die positiven und negativen Wurzeln herbeigeführt haben, so wird doch die Summe der einen und der andern, in dem Endresultate der Zahl der um Eins verminderten Glieder, oder dem Exponenten des Grades der Gleichung, oder endlich der Zahl der Wurzeln gleich seyn; und da die Abwechselungen nur von den positiven, so wie die Folgen von den negativen Wurzeln entstehn, so folgt daraus, daß man eben so viel Abwechselungen als positive Wurzeln, und eben so viel Folgen als negative Wurzeln haben wird, et vice versâ.

Die imaginairen Wurzeln modificiren diesen Satz, weil sie sowohl bey Abwechselungen, als bey Folgen Statt haben. In der That sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 \pm 2px + q = 0,$$

imaginair, was p auch für ein Zeichen habe, sobald $p^2 < q$ ist.

Man kann sehr oft das Daseyn imaginairer Wurzeln, durch obige Regel erkennen, sobald eine Gleichung etli-

etliche Gliede fehlen. Nehmen wir z. B.

$$x^3 + px + q = 0$$

an. Wir können durch $\pm ox^2$ das zweyte fehlende Glied ersetzen, und wir haben daher

$$x^3 \pm ox^2 + px + q = 0.$$

Wenn man aber bloß das obere Zeichen betrachtet, so findet man nur Folgen, das untere Zeichen hingegen, giebt zwey Abwechselungen. Da diese Resultate von denen eins drey negative Wurzeln, so wie das andere zwey positive und eine negative anzuzeigen scheint, nicht miteinander bestehen können, so zeigen sie, daß die Gleichung imaginaire Wurzeln hat. Wenn man hätte

$$x^3 - px + q = 0,$$

und man schriebe es

$$x^3 \pm ox^2 - px + q = 0,$$

so würde man immer, welche Zeichen man auch setzte, zwey Abwechselungen und eine Folge haben. Diese Uebereinstimmung der Resultate beweiset, daß sie drey wirkliche Wurzeln haben kann, nicht aber, daß sie sie wirklich hat, denn man weiß, daß dieses nicht geschehen kann, wenn man nicht $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ hat.

182.

Wir wollen jetzt die Gestalt untersuchen, welche die logarithmischen, exponentialen und Kreis-Functionen annehmen, wenn sie imaginaire Größen in sich enthalten.

Es sey zuerst

$$l(a \pm b\sqrt{-1});$$

macht man

$$\sqrt{a^2 + b^2} = r, \quad \frac{a}{r} = \cos z, \quad \frac{b}{r} = \sin z,$$

so kömmt

$$a + b\sqrt{-1} = r(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$$

und folglich

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = lr + l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z);$$

aber

$$l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \pm z\sqrt{-1}$$ (Einl. N. 38):

daher

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = lr \pm z\sqrt{-1}.$$

Gegeben sey bloß r, cos z, und sin z; man wird, wie in Nr. 166 statt des Bogens z, die Bogen

$$2\pi + z,\ 4\pi + z \ldots .\ 2i\pi \pm z$$

nehmen können, wenn i eine ganze Zahl ist: so daß man für $l(a \pm \sqrt{-1})$ eine unendliche Menge Werthe, die in der Formel

$$lr \pm (2i\pi + z)\sqrt{-1}$$

begriffen sind, erhält.

Wenn man b = o macht, so hat man

$$r = a,\ \sin z = o,\ z = o, \text{ und } la = la \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Dieses Resultat, welches zuerst parador scheinen wird, zeigt, daß eine reelle Größe für ein nemlichen Model, eine unendliche Menge Logarithmen hat, wovon ein einziger reel ist, nemlich der, welchen man erhält, indem man i = o setzt, und welchen wir durch die Characteristik L bezeichnen wollen. Wir werden daher schreiben,

$$la = La \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Die Gleichung

$$\pm x\sqrt{-1} = l(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)$$

führt unmittelbar zur nemlichen Schlußfolge denn indem man successive

$$x = o,\ x = 2\pi, \ldots .\ x = 2i\pi$$

macht,

macht, giebt sie

$$0 = L1, \pm 2\pi\sqrt{-1} = l1, \ldots \pm 2i\pi\sqrt{-1} = l1,$$

woraus man sieht, daß die Einheit eine unendliche Menge von imaginairen Logarithmen enthält. Weil aber $a = 1 \times a$, so kann man sagen $la = l1 + la$; und indem man für la den reellen Logarithmen La substituirt, und statt $l1$, seinen allgemeinen Werth $\pm 2i\pi\sqrt{-1}$ setzt, so findet man sogleich

$$la = La \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Um dies wohl zu verstehn, muß man sich erinnern, daß die Natur der Logarithmen einzig von der Gleichung $l(ab) = la + lb$ abhängt. Wenn man in dieser Gleichung für la und lb ihre allgemeinen Werthe

$$La \pm 2i\pi\sqrt{-1} \text{ und } Lb \pm 2i'\pi\sqrt{-1}$$

setzt, so wird die zweyte Hälfte, indem sie

$$La + Lb \pm 2(i + i')\pi\sqrt{-1}$$

wird, nothwendig einer der Logarithmen von ab, welche in der Formel

$$l(ab) = L(ab) \pm 2i''\pi\sqrt{-1} = La + Lb \pm 2i''\pi\sqrt{-1},$$

enthalten sind, seyn.

Welches also auch die Logarithmen von a und b seyn mögen, die man unter sich addirt, so wird doch ihre Summe immer einen der Logarithmen des Products ab gleich seyn.

Wenn man $x = 180° = \pi$ macht, so hat man $\cos x = -1$ und wenn man $(2i + 1)\pi$ anstatt $2i\pi$ setzt, findet man

$$l(-1) = \pm (2i + 1)\pi\sqrt{-1};$$

welches uns zeigt, daß alle Logarithmen von -1 imaginär sind; das nemliche gilt selbst von $-a$; denn

$$-a = a \times -1 \text{ und } l(-a) = La + l(-1)$$

$$\text{daher } l(-a) = La \pm (2i+1)\pi\sqrt{-1}.$$

183.

Mit Hülfe der vorhergehenden Betrachtungen lößte Euler die Schwierigkeit bey den Logarithmen der negativen Zahlen, welche der Gegenstand eines sehr langen Streites zwischen Leibnitz und Joh. Bernouilli waren. Der erste behauptete, daß diese Logarithmen imaginär, der zweyte, daß sie reel, und mit denen der positiven Zahlen einerley seyen. Wir können nicht in das Detail der von beyden Seiten angeführten Gründe gehen, aber einer der stärksten Beweise welchen man für die Realität der Logarithmen der negativen Zahlen anführte, war, daß man sagte; weil $(-a)^2 = a^2$ sey, so müßte

$$l(-a)^2 = la^2, \quad 2l - a = 2la,$$

und endlich $l - a = l + a$ seyn. Die Eulersche Theorie bestätigt die erste Folgerung und beweiset, daß die andern beyden falsch sind.

In der That, hat man

$$l(-a)^2 = 2l - a = 2La \pm 2(2i+1)\pi\sqrt{-1},$$

und weil die Zahl $2(2i+1)$ gerade ist, so ist dieser Ausdruck in der Formel

$$2La \pm 2i'\pi\sqrt{-1},$$

begriffen, welche alle Logarithmen von a^2 darstellt. Man hat also in einem gewissen Sinne $l(-a)^2 = la^2$.

Wenn man die Ausdrücke

$$2l - a = 2La \pm 2(2i+1)\pi\sqrt{-1}$$

$$\text{und } 2la = 2La \pm 4i\pi\sqrt{-1}$$

mit einander vergleicht, so sieht man, daß sie nie in einan=

einander fallen können, weil alle Zahlen von der Form $4i + 2$, wesentlich verschieden von denen von der Form $4i$ sind; aber der allgemeine Ausdruck der Logarithmen von a^2, muß alle Logarithmen, die man finden würde, indem man ohne Unterschied die der Factoren dieser Größe (Num. 182.) hinzugefügt, in sich enthalten. Er begreift also außer den doppelten eines jeden der Logarithmen von $+a$ und $-a$, die Summen in sich, welche man erhalten würde, indem man zwey von den erstern, oder zwey von den zweyten welche ungleich seyn werden, zusammenaddirt.

Es sey also

$$l(-a)^2 = 2La \pm 2(i + i' + 2)\sqrt{-1}$$

$$\text{und } la^2 = 2La \pm 2(i + i')\sqrt{-1}$$

In diesen letzten Ausdrücken finden sich die Logarithmen, welche der Gleichung $l(-a)^2 = la^2$ Genüge leisten, weil $2(i + i')$ immer irgend eine gerade Zahl bezeichnen kann.

Bernouilli zog noch aus der Quadratur der Hyperbel einen andern Einwurf vom großen Gewichte, welche Euler bestehen ließ; man hat aber seit dieser Zeit darauf geantwortet, wie wir es auch im Integralcalcul bey den Quadraturen zeigen werden, und obgleich d'Alembert, welcher Bernouillis Meinung beygetreten war, Eulers Erklärung nicht annehmen wollte, so hat sie jetzt doch den Beyfall der ausgezeichnesten Analysten.

184.

Wir haben vorläufig den Ausdruck des Logarithmen der imaginairen Größe

$$a + b\sqrt{-1} = r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$$

gesucht, und zum Resultat

$$lr + (2i\pi + z)\sqrt{-1}$$

erhalten; indem wir die Frage umkehren sieht man, daß, wenn der Logarithmus durch $m + n\sqrt{-1}$ vorgestellt ist, so erhält man $m = lr$, $n = 2i\pi + z$; und wenn man die Zahl, deren Einheit der Nepersche Logarithmus ist, durch e bezeichnet, so findet man $r = e^m$ (Einl. Num. 32, am Ende)

$$\sin z = \sin n, \quad \cos z = \cos n;$$

und endlich wird

$$e^m . (\cos n + \sqrt{-1} \sin n)$$

der Ausdruck der gesuchten Größe seyn. Diese Größe ist reel, wenn $n = 0$, oder irgend ein Vielfaches der halben Peripherie ist.

185.

Der Ausdruck

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$

kann man unter der Form

$$e^{(m+n\sqrt{-1})l(a+b\sqrt{-1})}$$

ausdrücken, weil allgemein $p^q = e^{qlp}$ ist, davon man sich überzeugen kann, wenn man die Logarithmen nimmt. Wenn man anstatt $l(a + b\sqrt{-1}$ seinen Werth $lr + z\sqrt{-1}$ setzt, so kömmt

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = e^{mlr - nz + (mz + nlr)\sqrt{-1}}$$

$$= e^{mlr-nz} e^{(mz+nlr)\sqrt{-1}}$$

$$= e^{mlr-n}[\cos(mz + nlr) + \sqrt{-1}\sin(mz + nlr)]$$

und weil $e^{mlr} = r^m$, so hat man endlich

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$

$$= r^m e^{-nz}[\cos(mz + nlr) + \sqrt{-1}\sin(mz + nlr)],$$

ein

ein Resultat, welches von der Form $A + B\sqrt{-1}$ ist. Man wird sich erinnern, daß um diesem Resultate die ganze Allgemeinheit zu geben, die es verträgt, man $2i\pi + z$ statt z setzen muß.

186.

Nehmen wir an, daß man $b = 0$ habe, so kömmt

$$r = a,\ z = 0,\ \cos z = 1 \text{ und}$$

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m e^{-2in\pi}[\cos(2im\pi + nla) + \sqrt{-1}\sin(2im\pi + nla)]$$

Wenn a eine negative Größe wäre, so nimmt man $z = 180°$, weil r immer eine positive seyn muß, so nimmt man $z = 180°$, woher $\cos z = 1$, und schreibt man $(2i + 1)\pi$ statt $2i\pi$, so giebt dieses

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}} = r^m e^{-(2i+1)n\pi}[\cos((2i + 1)m\pi + nla) + \sqrt{-1}\sin((2i + 1)m\pi + nla)].$$

Wenn a und $m = 0$ wären, so hätte man

$$r = b,\ \cos z = 0,\ z = 90° = \frac{\pi}{2},\ 2i\pi + z = \frac{(4i + 1)\pi}{2}$$

und $(l\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{\frac{-(4i+1)}{2}n\pi}(\cos nlb + \sqrt{-1}\sin nlb)$; wäre b negativ, so nehme man

$$z = 270° = \frac{3\pi}{2} \text{ und } 2i\pi + z = \frac{(4i + 3)}{2}\pi.$$

Dieser Ausdruck würde reel werden, im Fall man $b = 1$ annehme; und wenn man $n = 1$ und $i = 0$ macht, so gäbe er

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}207879,$$

ein Resultat, welches seiner Singularität wegen, bestä-

tigt zu werden verdiente. Dieserwegen bemerke ich, daß, wenn man $\sqrt{-1}$ statt u in der Reihe

$$lu = u - u^{-1} - \tfrac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \tfrac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \text{etc.}$$

setzt, (Einl. Num. 29.) so erhält man

$$l\sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \frac{1}{\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}(-1+1)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(-\sqrt{-1} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.} = \frac{-2}{\sqrt{-1}}\left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots\right\}$$

Die zwischen den Klammern begriffene Reihe bezeichnet den Werth des Bogens von 45° in einem Kreise dessen Radius = 1 ist (Einl. Num. 38); also

$$l\sqrt{-1} = \frac{-2}{\sqrt{-1}}\,\frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2};$$

weil aber $u^u = e^{ulu}$, so hat man

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \text{etc.}$$

Man wird bemerken, daß die Gleichung

$$l\sqrt{-1} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$$

zu welcher wir jetzt gekommen sind,

$$\pi = \frac{2l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \text{ und } 2\pi = \frac{4l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \text{ giebt.}$$

Dieser Ausdruck von der Peripherie des Kreises welcher sich auch aus der Gleichung

$$x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sqrt{-1}\sin x),$$

ableitet, indem man $x = \frac{\pi}{2}$ macht, und welcher von

Joh.

Joh. Bernoulli gefunden worden ist, ist nur ein abgekürztes Symbol, welches eine unendliche Reihe darstellt.

187.

Es sey die Kreisfunction $\sin(a \pm b\sqrt{-1})$ gegeben, so hat man

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \sin a \cos(b\sqrt{-1}) \pm \cos a \sin(b\sqrt{-1}).$$

Um $\sin b\sqrt{-1}$ $\cos b\sqrt{-1}$ zu erhalten, setze man $b\sqrt{-1}$ statt x in den Formeln von Num. 37 der Einleitung, und es wird heraus kommen

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2\sqrt{-x}} = \left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)\sqrt{-1},$$

$$\cos(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe, so hat man

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right)\sin a \pm \sqrt{-1}\left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)\sin a.$$

Man wird auch finden

$$\cos(a \pm \sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right)\cos a \mp \sqrt{--1}\left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)\sin a.$$

Zu den Ausdrücken der andern Kreisfunctionen, als der Tangenten, Secanten etc. wird man eben so gelangen.

Da $a = 2i\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{(4i \pm 1)\pi}{2}$, so kimmt

$$\sin a = \pm 1, \quad \cos a = 0, \text{ und}$$

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \pm \tfrac{1}{2}(e^{b} + e^{-b});$$

Die Annahme von $a = i\pi$ giebt ebenfalls

$$\cos(a \pm b\sqrt{-1}) = \pm \tfrac{1}{2}(e^{b} + e^{-b})$$

weil in diesem Falle $\sin a = 0$ und $\cos a = \pm 1$ ist,

 nach

nach dem i gerade oder ungrade ist. Es giebt also imaginaire Bogen, deren Sinus und Cosinus einen reellen Werth haben. Man muß indessen beobachten, daß dieser Werth mit der Natur des Kreises in Widerspruch stehet, denn solange b nicht = o ist, in welchem Fall der Bogen reel seyn würde, so übertrift die Größe

$$\frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{2b} + 1}{e^b}$$

immer die Einheit oder den Radius, welches bey keinem im Kreise genommenen Sinus oder Cosinus Statt haben kann *).

Man würde noch andere merkwürdige Folgerungen aus den in diesen Capitel erhaltenen Resultaten ziehn können, und wenn man die Frage, welche uns dahin geführt hat, umkehrt, so würde man zum Ausdruck imaginairer Bogen gelangen, welche zu imaginairen Sinus oder Cosinus, oder vielmehr den reellen Cosinus und Sinus, die größer als der Radius sind, entsprechen: aber wir verweisen für dieses Detail auf das Eulersche Memoire, welches in der Inhalts-Anzeige citirt ist.

188.

Die Resultate von Num. 163, 164, 182, 184, 185, 187, beweisen, daß alle algebraische, logarithmische, exponentiale, oder Kreisfunctionen, sobald sie

*) Man wird in der Folge sehen, daß die Existenz dieser Sinus und Cosinus die zu imaginairen Bogen gehören, aus der Natur der gleichseitigen Hyperbeln entspringt, eine Curve deren Eigenschaften die größte Analogie mit denen des Kreises haben.

sie imaginair sind, auf die Form $A \pm B\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden können.

189.

Ich habe geglaubt, die Eliminirung der unbekannten Größen in den algebraischen Gleichungen, welche in keinem Elementarwerk der Algebra unter einem allgemeinen Gesichtspuncte dargestellt worden ist, hier ergänzen zu müssen, und das um so mehr, da die deutlichste Theorie dieser Operation auf den Eigenschaften der symmetrischen Functionen beruht, die ich im Anfang dieses Capitels abgehandelt habe. Es seyen die beyden Gleichungen

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0 \ldots (1),$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots + Y'x + Z' = 0 \ldots (2);$$

Das erste Mittel, welches sich darbietet, um x aus diesen Gleichungen fortzuschaffen, besteht darin, in einer von ihnen den Werth von x zu nehmen, um ihn nachher in der andern zu substituiren. Nehmen wir also an, daß die Gleichung (1) aufgelößt sey, und daß man daraus die verschiedenen Werthe

$$x = \alpha, \quad x = \beta, \quad x = \gamma, \quad x = \delta \text{ etc.}$$

gezogen habe; da sie alle zu der gegebnen Frage gehören, so müssen sie ohne Unterschied in die Gleichung (2) gesetzt werden, und werden also soviel von x befreyete Resultate hervorbringen, als die Gleichung (1) Wurzeln hat: man wird also separirt haben

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^n + P'\alpha^{n-1} + Q'\alpha^{n-2} + R'\alpha^{n-3} \ldots + Y'\alpha + Z' = 0 \\ \beta^n + P'\beta^{n-1} + Q'\beta^{n-2} + R'\beta^{n-3} \ldots + Y'\beta + Z' = 0 \\ \gamma^n + P'\gamma^{n-1} + Q'\gamma^{n-2} + R'\gamma^{n-3} \ldots + Y'\gamma + Z' = 0 \\ \delta^n + P'\delta^{n-1} + Q'\delta^{n-2} + R'\delta^{n-3} \ldots + Y'\delta + Z' = 0 \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Keine von diesen Gleichungen, insbesondere betrachtet, kann nicht die hervorgegangene Gesuchte seyn; diese letzte aber muß sie alle in sich begreifen und zu gleicher Zeit so wie eine jede von ihnen Statt haben, eine Bedingung welche man erfüllen muß indem man sie untereinander multiplicirt und dem Producte gleich Null setzt; weil das Product identisch Null wird; wenn irgend einer seiner Factoren verschwindet: überdem sieht man, daß er nicht verändern wird, welche Versetzungen man auch in der Ordnung der Größen α, β, γ, δ, u. s. w. welche alle auf derselben Art zu ihrer Bildung beytragen, macht, es wird daher nur symmetrische Functionen dieser Größen enthalten, und wird sich daher durch die Coefficienten der Gleichung (1) rationel ausdrücken lassen, vermittelst der in Num. 159 angezeigten Formeln.

Wenn die Gleichung (1) und (2) nur zwey Unbekannten x und y einschließen und von einen gleichen Grade in Beziehung auf der Einen sowohl als auf der Andern sind, so wird die Endgleichung in y sich nicht über den Grad mn erheben. denn da die Summe der Exponenten von x und von y, nicht m, in jeden Gliede der Gleichung (1) übersteigen kann, so wird y sich nur im ersten Grade in P befinden, im zweyten in Q, im dritten in R ... im $(m-1)$ten in T, und endlich im $m$ten in U. Bey der Untersuchung der Zusammensetzung der Gleichungen, welche geben S_1, S_2, S_3, u. s. w. (Num. 158) wird man sehen, daß S_1 nur vom 1ten Grade in y, seyn kann, S_2, vom zweyten S_3, vom dritten, und überhaupt, S_m, vom $m$ten. Mit Hülfe dieser Bemerkungen kann man leicht begreifen, daß der Exponent von y in einer jeden symmetrischen Function $\alpha^n \beta^p \gamma^q \delta^r$ u. s. w. Num. 159) nicht die Zahl,

$n + p + q + r +$ etc. welche den Grad dieser Function anzeiget übertreffen wird. Man kann daher die verschiednen Potenzen von α, β, γ, δ, u. s. w. ansehen als Functionen von y des durch den Exponenten womit sie behaftet sind, bezeichneten Grades. Aber da in der Gleichung (2) die Summe der Exponenten von x und y nie größer als n ist, so wird P' vom ersten Grade in y, Q' vom zweyten, R' vom dritten ... Y' vom $(n-1)$ten und endlich Z' vom $n$ten seyn; alle Glieder der Gleichung (3) können daher auch als Functionen von y zum höchsten vom $n$ten Grade angesehen werden. Jetzt, wenn man bemerkt, daß ein jedes Glied des Products der Gleichungen (3) eine Anzahl von m Glieder dieser Gleichungen zu Factoren haben wird, so wird man überzeugt seyn daß y sich nicht darin mit einem höhern Exponenten als mn, befinden wird.

Diejenigen, welche einige Mühe haben werden die vorhergehende Raisonnements zu begreifen, wegen ihrer großen Allgemeinheit werden wohlthun das Product der Gleichungen (3) in einigen besondern Fällen zu entwickeln.

Wir haben also diesen Satz bewiesen, daß man oft nöthig hat, sich zu erinnern, daß der Exponent des Grades der aus der Eliminirung einer unbekannten Größe zwischen zwey Gleichungen mit zwey unbekannten Größen hervorgezogenen Endgleichung, nicht das Product der Exponenten, welche den Grad einer jeden Gegebenen anzeigen, übertreffen könnte.

190.

Wenn man einen der Werthe von y, welche durch die Endgleichung gegeben sind, erhalte hat, so muß man

 ihm

ihm in die Gleichungen (1) und (2) substituiren, und wird dadurch wieder zwey neue Gleichungen erhalten, welche, da sie nur noch die einzige unbekannte Größe x enthalten, zum wenigsten einem gemeinschaftlichen Factor von der Form $(x - \alpha)$ haben müssen, wo α der Werth von x ist, welcher sowohl die eine als die andere befriediget. Man wird daher ihren größten gemeinschaftlichen Divisor suchen, und indem man ihm gleich Null setzt, so hat man die Gleichung welche x geben soll. Diese letztere Gleichung wird von einem Grad seyn, welcher durch die Anzahl der Werthe von x, die einerley Werthe von y entsprechen angezeigt wird.

191.

Das Mittel welches wir angezeigt haben um den Werth von x zu finden, nachdem uns der Werth von y bekannt ist, kann unmittelbar zur Eliminirung angewand werden.

Weil die Gleichungen (1) und (2), wenn y der Natur der Frage gemäß bestimmt ist, einen gemeinschaftlichen Divisor erlangt, welchen sie vorhero noch nicht hatte, so darf man nur die Bedingung aufsuchen, von welcher die Existenz dieses Divisors abhängt. Um dazu zu gelangen, muß man mit den vorgelegten Gleichungen so verfahren, als man thun würde um den gemeinschaftlichen Divisor zu finden, wenn er existirte, und wenn man zu einem von x unabhängigen Rest gekommen seyn wird, und solchen gleich Null setzt, so wird man die geforderte Bedingung ausdrücken, und man wird auch zu gleicher Zeit die Endgleichung haben.

192.

Euler, anstatt den gemeinschaftlichen Divisor nach der gewöhnlichen Methode zu suchen, gebraucht ein leichteres Verfahren, und welches das folgende Beyspiel hinlänglich zu erkennen geben wird.

Die beyden mögen seyn:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

$$x^4 + P'x + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

wenn man durch $x - \alpha$ den gemeinschaftlichen Factor der einen und der andern vorstellt, so könnte man die Erste als das Product von $x - \alpha$, durch den Factor des zweyten Grades, $x^2 + px + q$ ansehen, und die zweyte als das Product von $x - \alpha$; durch den Factor des dritten Grades,

$$x^3 + p'x^2 + q'x + r',$$

wo p und q, p', q' und r' unbestimmte Coefficienten sind: man wird also haben:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R \qquad = (x - \alpha)\ (x^2 + px + q),$$

$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x - \alpha)\ (x^3 + p'x^2 + q'x + r').$$

Wenn man das Binomium $(x - \alpha)$ als eine unbekannte Größe vom ersten Grade Eliminirt, so wird man finden,

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)\ (x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$

$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')\ (x^2 + px + q),$$

ein Resultat, welches unabhängig von x identisch seyn soll, und aus welchen man, nachdem man die angezeigten Multiplicationen verrichtet hat die folgenden Gleichungen ziehet:

$$P + p' = P' + p$$

$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q$$

$$R + Qp' + Pq' + r' = R' + Q'p + P'q.$$

$$Rp' + Qq' + Pr' = S' + R'P + Q'q$$

$$Rq' + Qr' = S'p + R'p$$

$$Rr' = S'q.$$

Da

Da diese Gleichungen sechs an der Zahl, nur fünf unbestimmte Coefficienten enthalten, so wird nothwendig eine Bedingungsgleichung in Beziehung der Existenz des angenommenen gemeinschaftlichen Factors seyn, und man wird dazu gelangen, indem man alle unbestimmte Größen p, q, p', q' und r', welche nur im ersten Grade sind, eliminirt, das daraus entstehende Resultat wird die Endgleichung in y seyn.

Man wird den Factor $x - \alpha$ finden, wenn eine der gegebenen Gleichungen mit ihren anderen Factor dividirt wird, welcher bekannt seyn wird, wenn man die Coefficienten p, und q, oder p', q' und r' bestimmt hat, man muß beobachten, daß der lezte Theil dieser Division welcher der Endgleichung zu folge, Null seyn soll, vernachläßiget wird, und macht man $x - \alpha = 0$, so wird man daraus sogleich einen Ausdruck von x in y finden, welcher die verschiedenen Werthe die x fähig ist, geben wird, indem man alle diejenigen Werthe von y darin sezt, die aus der Endgleichung entstehen.

Ich will mich nicht aufhalten zu zeigen, daß diese Eliminirungsmethode sich auf Gleichungen von allen Graden ausdehnet. Bey Betrachtung der Gleichung des Grades m und des Grades n, wird man ohne Mühe sehen, daß die Factoren des Grades $m - 1$ und des Grades $n - 1$ welchen man einführen wird, eine hinreichende Anzahl unbestimmter Coefficienten enthalten werden um die Frage zu befriedigen.

Wenn man zwischen den drey unbekannten Größen x, y und z eine ähnliche Anzahl durch (1)(2)(3) bezeichnete Gleichungen hätte, und, wenn man diese Unbekannten bestimmen wollte, so könnte man z. B. die Gleichung (1) mit (2) und mit (3) combiniren um x und nachher

y aus

y aus den beyden erhaltenen Resultaten zu eliminiren; aber man muß bemerken, daß durch diese successive Eliminirungen die drey vorgelegten Gleichungen nicht auf dieselbe Art beytragen um die Endgleichung zu bilden: die Gleichung (1) ist zweymahl benutzt, unterdeß daß (2) und (3) es nur einmahl sind, daraus folgt, daß das Resultat zu welchen man gelangt mit einem der Frage fremden Factor complicirt ist. Bezout hat in seiner Theorie der Gleichungen uns eine Methode gegeben, welche nicht dieser Unbequemlichkeit unterworfen ist, und durch welche er beweiset, daß der Grad von der aus der Eliminirung einer beliebigen Anzahl von vollständigen Gleichungen hervorgegangenen Endgleichung, welche eine gleiche Anzahl von unbekannten Größen und von beliebigen Graden enthält, den Producten der Exponenten dieser Gleichungen gleich ist: die vorläufigen Kenntnisse welche sie erfordert erlauben uns nicht sie hier vorzutragen. *)

193.

Die Differentialrechnung erleichtert die Anwendung der Methode, welcher man sich bedient um Werthe zu finden, die sich mehr und mehr der Wurzeln einer Gleichung nähern. Vorausgesetzt, man habe zwischen x und zwischen gegebenen Größen, eine beliebige Gleichung und man ferner weiß, daß diese unbekannte Größe wenig von

*) Man wird sie bey den Anwendungen der Theorie der endlichen Differenzen finden, welche ich am Ende des Werks vortrage.

von der Zahl a verschieden sey; indem man $x = \alpha + h$ macht, und indem man durch u das Resultat, welchen uns die vorgelegte Gleichung giebt, vorstellt wenn man darin x in α verwandelt, so wird die Reihe.

$$u + \frac{du}{da}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{h}{1.2.3} \text{ u. s. w. (Num. 12)}$$

ausdrücken was u wird, wenn man $a + h$ statt a setzt, oder was gleich viel ist, sie wird die Entwickelung der vorgelegten Gleichung seyn, welche aus der Substitution von $a + h$ statt x hervorgeht, und daher gleich Null seyn soll, weil $a + h$ diese Gleichung befriediget.

Aber da nach der Hypothese h nur eine kleine Zahl ist, so könnte man die Glieder weglassen, wo sie sich über der ersten Potenz hinaus erhebt und man wird nur bloß haben $u + \frac{du}{da}h = 0$. Sobald als h mit Hülfe dieser Gleichung bestimmt seyn wird, so macht man $a + h = a'$ und $x = a' + h'$: Das heißt, man wird setzen in u und in $\frac{du}{da}$, a' statt a, und h' statt h; daraus wird die Gleichung

$$u' + \frac{du'}{da'}h' = 0,$$

welche eine neue Verbesserung des für x vorgefundenen Werths, zu machen geben wird. Indem man so fortfährt auf dieselbe Art zu Werke zu gehen, so wird man Werthe von x finden, welche sich immer mehr und mehr nähern.

Um von dieser Methode Gebrauch zu machen, so wollen wir den Werth von x in der Gleichung

$$x^x - 100 = 0$$

suchen. Man wird gleich sehen, daß x zwischen 3 und

4 fal=

4 fallen muß, und indem wir 3,5 für den ersten nahe kommenden Werth annehmen, so macht man $3,5 = a$. Man könnte die vorgelegte Gleichung in

$$x l x - 1100 = 0$$

verwandeln, und durch dieses Mittel kömmt

$$u = a l a - 1100 = - 0,09576;$$

aber indem man bemerkt daß das Differential des Tafellogarithmus von a, deren Modulus 0,43429 (Einl. Num. 24) ist, auf folgende Art ausgedrückt wird: $0,43429 \frac{da}{a}$ (N. 20,) so finden wir

$$\frac{du}{da} = l a + 0,43429 = 0,97836;$$

daraus

$$- 0,09576 + 0,97836\, h = 0,$$

und folglich

$$h = \frac{9576}{97836} = 0,09788:$$

man würde also haben $x = 3,598$, die zweyte Operation in welcher man $a = 3,598$, machen würde gäbe einen noch viel genauern Werth.

194.

Wenn man zwey Gleichungen $u = 0$, und $v = 0$, zwischen x und y hätte, und a und b Werthe wären, die sich diesen unbekannten Werthen näherten, so würde man $a + h$ statt x und $b + k$ statt y setzen, und finden, indem man die Producte und die Potenzen von h und k außer Acht läßt.

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{du}{db} \cdot \frac{k}{1} = 0,$$

$$v + \frac{dv}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{dv}{db} \cdot \frac{k}{1} = 0.$$

Die:

Diese Gleichungen würden dienen die Verbesserungen h und k zu bestimmen; macht man nachher $a + h = a'$, $b + k = b'$ und $x = a' + h'$, $y = b' + k'$, so würde man, wie oben, die Werthe der neuen Verbesserungen h' und k' finden, und man würde so zu handeln fortfahren, bis man zu den hinlänglich genauen Resultaten gelangt wäre.

Wir wollen zum Beyspiel die beyden Gleichungen nehmen,

$$x^x + y^y - 1000 = 0, \qquad x^y + y^x - 100 = 0,$$

und voraus setzen, daß, nach verschiednen Versuchen man dahin gekommen sey zu erkennen, daß die größte der beyden Zahlen unter 4 und 5 und die kleinste, unter 2 und 3, enthalten seyn muß: da man x für die erste und y für die zweyte nimmt, und indem man $4{,}5 = a$, $2{,}5 = b$, macht, so hat man

$$u = a^a + b^b - 1000 \qquad v = a^b + b^a - 100$$

$$\frac{du}{da} = a^a la + a^a \qquad \frac{dv}{da} = b^a lb + ba^{b-1}$$

$$\frac{du}{db} = b^b lb + b^b \qquad \frac{dv}{db} = a^b la + ab^{a-1}$$

Man wird die Größen u, v, $\frac{du}{da}$, $\frac{dv}{da}$, $\frac{du}{db}$, $\frac{dv}{db}$, berechnen, indem man bemerkt das die angezeigten Logarithmen Nepersche sind, und man wird die beyden Gleichungen des ersten Grades bilden

$$-120{,}244 + 2178{,}232\,h + 18{,}937\,k = 0,$$
$$+4{,}720 + 80{,}458\,h + 150{,}535\,k = 0,$$

woraus man ziehen wird $h = 0{,}056$, $k = -0{,}061$, und folglich, $a + h = a' = 4{,}56$, $b + k = b' = 2{,}44$: eine zweyte Operation würde geben

$$a' + h' = 4{,}5519, \quad b' + k' = 2{,}4495, \text{ u. s. w.}$$

Vier=

Viertes Kapitel.

Theorie der krummen Linien.

Obgleich der Hauptgegenstand dieses Capitels die Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Linien seyn soll, so habe ich doch geglaubt, ganz kurz darin den algebraischen Theil von dieser Theorie mitzunehmen, um ein vollständiges Ganze darzubieten, und um Begriffe, welche zerstreuet und unter sehr verschiedenen Gesichtspuncten dargestellt sind, untereinander zu verbinden. Es wird nur hier von den krummen Linien welche man auf einer Ebene zeichnen kann die Rede seyn; man wird in dem folgenden Capitel dasjenige was die krumme Linien auf krumme Oberflächen angehet finden.

195.

Auf welche Art die verschiedenen Umstände des Laufs einer Linie durch ihre Gleichung ausgedrückt sind.

Man weiß, daß eine jede Gleichung die zwey unbestimmte Größen x und y enthält, sich construiren läßt,

wenn man auf einer Linie AB (Fig. 5) von einem gegebenen Puncte A anfangend Theile AP, AP′, AP″ u. s. w. nimmt um die Werthe einer der unbestimmten Größen anzuzeigen, z. B. die von x und wenn man durch die Puncte P, P′, P″ u. s. w. gerade Linien ziehet, die den correspondirenden Werthen von y gleich, und mit einerley in Beziehung auf AB der Lage nach gegebenen graden AC parallel ziehet; so ist die Linien M M′ M″, welche durch alle auf solche Art gefundenen Puncte durchgehet, der Ort der vorgelegten Gleichung.

Umgekehrt, in jeder durch seiner Beschreibung einem regulären Gesetz unterworfenen, oder mit einigen für alle Puncte gemeinschaftlichen Eigenschaften begabten Curve, existirt immer zwischen der Abscisse AP, und der Ordinate PM, eine beständige Relation die ihre Natur anzeiget, und woraus man alle ihre Eigenschafften herleiten kann. Diese Relation kann nicht in allen Fällen unter einer algebraischen Form erhalten werden, und daraus entsteht die Unterscheidung der Curven in Algebraische und in Transcendente Curven *).

Die respective Lage der Linien AB und AC, welche man Axen der Coordinaten nennt, als auch die Lage des Puncts A, welcher davon der Ursprung ist, sind willkührlich und gehören zu den Conventionen; man ist selbst nicht verpflichtet die Abscissen auf einerley graden Linie

*) Man nennt diese letztern auch mechanische Curven; aber diese Benennung scheint mir nicht angemessen, denn die Beschreibung einer jeglichen Curve, wenn man mit der Curve des Kreises anfängt, läßt sich nur durch mechanische Hülfe ausführen, und manche algebraische Curve erfordert deren zusammengesetztere als gewisse transcendente Curven.

Linie, und die Ordinate unter sich parallel zu nehmen; aber dieses System der Coordinaten ist überhaupt das bequemste, und wir werden in der Folge sehen, daß alle übrigen darauf zurückgeführt werden können; und um es recht einfach zu machen, so wollen wir immer den rechten Winkel BAC nehmen, es sey denn daß wir vom Gegentheile Nachricht geben.

196.

Die aller einfachste von allen Gleichungen mit zwey unbestimmten Größen, ist die, des ersten Grades, und sie gehört zu der geraden Linie, die allereinfachste unter allen. Diese Gleichung kann durch $Cy = Ax + B$ vorgestellet werden; aber, wenn man sie durch C dividirt, so wird sie nichts von ihrer Allgemeinheit verlieren, und man wird haben $y = \frac{A}{C} x + \frac{B}{C}$; wenn man $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$ macht; so folgt daraus $y = ax + b$: auf die Art werden wir sie inskünftige vorstellen.

Wir wollen gleich voraussetzen daß b Null sey, so wird man bloß haben $y = ax$ oder $\frac{y}{x} = a$, d. h. daß in der ganzen Ausdehnung der geraden Linie, das Verhältniß von PM zu PA (Fig. 6) beständig sey, eine Eigenschaft welche nichts weiter als der Ausdruck der Aehnlichkeit der Triangel APM, AP′M′ u. s. w. ist; und nur der geraden Linie AX angehören kann, die durch den Punct A, als den Ursprung der Coordinaten gezogen ist.

Das Verhältniß $\frac{x}{y}$ oder der Coefficient a, hängt von dem Winkel welchen die gerade Linie AX mit der Abscissenlinie AB macht, ab; aber in dem Triangel APM, wel-

chen wir uns als einen Rechtwinkeligen vorstellen wollen, ist der Verhältnißnahme von PM zu AP gleich der Tangente des Winkels PAM; a stellt also die Tangente dieses Winkels vor.

Wenn wir die Gleichung $y = ax + b$ betrachten, so sehen wir daß die neue Ordinate y, nur von der ersten $y = ax$, dadurch unterschieden ist, daß sie ihr um der Größe b übertrifft; daraus folgt, daß, wenn man $AD = b$ nimmt, und man die Linie DY parallel mit AX führt, sie immer der Ort der Gleichung $y = ax + b$ bleiben wird, weil man

$$PN = PM + MN = PM + AD, P'N' = P'N' = P'M' + M'N'$$
$$= P'M' + AD, \text{ u. s. w.}$$

haben wird; und man muß wohl bemerken daß der Coefficient a immer, für alle mit AX parallele Linien, derselbe bleiben wird.

Man kann leicht sehen, daß in der Gleichung $y = ax + b$, nichts die Werthe welche man x geben kann, begränzt, und daß daher die Werthe von y so groß werden als man nur immer will; aber da zu gleicher Zeit nichts den Lauf der Linie DY im unbegrenzten Raume BAC, begränzet, so wird man immer hinlänglich große Abscissen und Ordinaten finden, um die Werthe von x und y vorzustellen, welche der vorgelegten Gleichung genüge leisten werden. Wir wollen $x = 0$ machen, so werden wir haben $y = b$; dieser Werth wird dem Punct D zugehören, wo die grade Linie DY, die Axe AC der Ordinaten begegnet. Wenn x negativ seyn wird, so findet man $y = -ax + b$, und da ax weniger ist als b, so wird y noch positiv seyn, aber weniger als b oder AD. Der Lauf der Linie DY zeigt uns an, daß dieser Umstand nur statt haben kann, in dem Theile DE, welcher corre-

spondirt

spondirt mit den Abscissen Ap, die in Beziehung auf dem Puncte A, auf der entgegengesetzten Seite der Abscissen AP, welche die positiven Werthe von x vorstellen, liegen; es ist also von dieser Seite, daß man die negativen Werthe nehmen muß.

Um den Werth von x welcher mit dem Puncte übereinkömmt, wo die Linie DY, die Axe AB der Abscissen begegnet, zu finden, muß man $y = 0$ machen, welches giebt $ax + b = 0$, und $x = -\frac{b}{a} = AE$. Sobald, als x, wenn es immer negativ bleibt, die Größe $\frac{b}{a}$ übertroffen haben wird, so wird y selbst negativ werden. Aber über den Punct E hinaus wird sich die Linie DY unter der Linie AB befinden, die Ordinate p′m′ wird also von einer Seite derjenigen entgegengesetzt, wo sie sich zuerst befand, fallen, und folglich müssen die negativen Werthe von y nach einer Seite der Linie AB fallen, derjenigen entgegengesetzt, welche man für die positiven Werthe angenommen hat. Ich bemerke daß nichts bestimmt, welche Seite der Abscissen oder der Ordinaten man für positiv ansehen soll; aber ist die Wahl einmahl gemacht, so werden die entgegengesetzten Seiten dadurch allein negativ. Ich bestehe nur darum auf diese Bemerkungen weil mir deucht, daß in den mehrsten Elementarbüchern, man nicht sorgfältig genug bewiesen hat, daß man nothwendig die negativen Größen von der entgegengesetzten Seite der positiven Größen nehmen muß, und dennoch hängen größtentheils davon die verschiedenen Formen welche die krumme Linien annehmen, ab. So wie wir es weiter unten sehen werden.

Da die Gleichung $y = ax + b$ nur zwey beständige Größen a und b enthält von welchen der Werth die grade Linie welche man betrachtet particularisirt, indem sie von allen andern unterschieden wird, so folgt daraus daß zwey Bedingungen hinreichend sind um diese grade Linie zu bestimmen. Diejenigen welche sich zuerst darbieten, sind, sie zu zwingen durch zwey gegebene Puncte durchzugehen, parallel oder perpendiculär mit oder auf einer andern gegebenen graden Linie zu seyn und überdieß noch durch einen gegebenen Puncte zu gehen. Wir werden in der Folge nöthig haben die Form welche die Gleichung $y = ax + b$ annimmt, zu kennen, um diesen Bedingungen Genüge zu leisten, darum wollen wir eine jede insbesondere untersuchen.

197.

Wenn man die Gleichung der graden Linie sucht, die durch zwey Puncte von welcher die Abscissen α und α', und die Ordinaten β und β' seyn sollen, so wird man successive α und α' statt x', β und β' statt y setzen und man wird um a und b zu bestimmen die beyde Gleichungen haben

$$\left.\begin{array}{l}\beta = a\alpha + b\\ \beta' = a\alpha' + b\end{array}\right\}\text{ welche geben werden }\left\{\begin{array}{l}a = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\\ b = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}\end{array}\right.$$

und woraus entstehen wird

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

für die Gleichung der gesuchten graden Linie.

Man kann diesem Resultate eine einfachere Form geben; denn, wenn man von der Gleichung $y = ax + b$ eine der beyden oben angezeigten Gleichungen, die erste

zum

zum Beyspiel, abziehet, so wird b verschwinden und es wird kommen $y - \beta = a(x - \alpha)$. Diese letzte Gleichung wird die einer graden Linie seyn, die gezwungen ist durch den Punct zu gehen, von welchen die Ordinaten α und β sind, und die überdem noch mit der Axe AB einen beliebigen Winkel bildet. Man wird sie zu bestimmen vollenden, wenn man statt a den vorher gefundenen Werth setzt, und man wird haben

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

Die Entfernung der vorgegebenen Puncte, oder der Theil der gesuchten zwischen ihnen enthaltenen graden Linie, wird zum Ausdruck haben

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}:$$

Dieses sieht man augenscheinlich ein, wenn man voraussetzt, daß N und N′ diese Puncte vorstellen; denn da die Entfernung NN′ die Hypothenuse des rechtwinkligen Triangels NRN′ ist, so folgt daraus daß

$$\overline{NN'}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{N'R}^2 = (AP' - AP)^2 + (P'N' - PN^2)$$

198.

Um die Gleichung der graden Linie zu erhalten, welche durch den Punct gehen würde von welchen die Ordinaten α und β sind, und die parallel mit der durch die Gleichung

$$y = a'x + b',$$

vorgestellten Linie seyn würde, so wird es hinlänglich seyn a' statt a in der Gleichung

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

zu setzen, welche schon die erste Bedingung befriedigt, weil nach Nr. 196. der Coefficient von x derselbe in den Glei-

chungen der geraden untereinander parallelen Linien ist, man wird also für die welche man sucht

$$y - \beta = a'(x - \alpha)$$

haben.

199.

Endlich wenn AX und AZ, Fig. 7 zwey gerade Perpendicular-Linien unter einander sind, so wird man durch die Aehnlichkeit der Triangel Apm und Apn sehen, daß das Verhältniß von pm zu Ap, das umgekehrte von pn zu Ap ist, und da pn negativ ist, wenn pm positiv ist, et vice versâ, so folgt daraus, daß, wenn man den ersten Verhältnißnahmen durch a vorstellt, so wird der zweyte $-\frac{1}{a}$ seyn. Die Gleichungen der geraden Linie AX und AZ werden also $y = ax$ und $y = -\frac{1}{a}x$ seyn.

Wenn man nachher die geraden Linien DY und EU respective parallel mit AX und AZ, und folglich unter sich perpendiculär betrachtet, so wird man für ihre Gleichungen finden

$$y = ax + b \qquad \text{und } y = -\frac{1}{a}x + b'.$$

Wenn die zweyte durch einen Punct N von welchen die Ordinaten α und β seyn können, durchgehen soll, so wird ihre Gleichung

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

werden.

200.

Zwey Linien welche sich schneiden haben in ihrem Durchschnittspuncte dieselben Ordinaten, dergestalt, daß,

um

um die Ordinaten des Begegnungspuncts der beyden durch die Gleichungen

$$y = ax + b, \text{ und } y = a'x + b'$$

gegeben graden Linien zu finden, man nur voraussetzen darf, daß die unbekannten Größen x und y denselben Werth in dieser und jener Gleichung haben; man wird also haben

$$ax + b = a'x + b',$$

welches geben wird

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \text{ und } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Man sieht durch diese Werthe, daß der Punct des Zusammenlaufs, um so viel mehr von den Axen AB und AC entfernt ist, als die Größe $a' - a$ kleiner ist, und daß x und y unendlich werden, wenn $a' = a$, das heißt, wenn die vorgegebenen graden Linien aufhören sich zu begegnen, oder wenn sie parallel sind.

201.

Es kann nützlich seyn die Länge der gefällten senkrechten Linien, aus einem gegebenen Puncte auf einer gegebenen Linie zu kennen und man wird dazu gelangen, wenn man die Unterschiede zwischen die Coordinaten dieses Punctes, und die des Durchschnitts der gegebenen graden Linie, mit der auf ihr senkrechten Linie suchet. Aber da die Gleichung der ersteren

$$y = ax + b$$

ist, so wird die Gleichung der zweyten

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

seyn; man kann aber $y = ax + b$ unter der Gestalt von

$$y - \beta = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha$$

setzen, und diese letzte Gleichung

$$y - \beta = - \frac{1}{a}(x - \alpha)$$

hinzufügt, wird geben

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{1 + a^2}, \quad y - \beta = - \frac{\beta - a\alpha - b}{1 + a^2}$$

Wenn man diese Werthe im Ausdruck

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

so wird man füe die Länge der gesuchten Perpendicularlinie

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

haben.

202.

Man theilt die Linien in verschiedenen Ordnungeu nach dem Grade ihrer Gleichung. Die grade Linie bildet die erste Ordnung, weil sie die allgemeine Gleichung des ersten Grades zu zwey unbestimmten Größen vorstellt. Die Linien der zweyten oder dritten Ordnung, sind, die deren Gleichungen bis zum zweyten oder dritten Grade steigen, und so auch die andern. Newton theilte, indem er betrachtete, daß die erste Ordnung nur die grade Linie in sich begriffe, und daß sich die krummen Linien nur in der zweyten Ordnung zu zeigen anfingen, diese letztern in verschiedene Geschlechter und nannte krumme Linien von dem ersten Geschlechte, die Linien der zweyten Ordnung und krumme Linien von dem zweyten Geschlechte, diejenigen von der dritten Ordnung u. s. w.

Die Linien von einerley Ordnung theilen sich wieder durch die Betrachtung der vorzüglichsten Umstände ihres Laufs, in verschiedene Arten ein.

Wenn

Wenn es möglich wäre die Gleichungen von allen Graden aufzulösen, so würde nichts leichter seyn, als den Lauf der durch irgend einer algebraischen Gleichung vorgestellten Curve zu folgen. In Wahrheit, wir wollen voraussetzen, daß, wenn diese Gleichung in Beziehung auf einer dieser unbestimmten Größen welche sie enthält, aufgelößt wäre z. B. y, diese die verschiedenen Wurzeln X; X'' — X''' u. s. w. gegeben hätte, welche nothwendig Functionen von x und von beständigen Größen seyn werden; so wird die Frage sich dahin reduciren, den Lauf von jeglicher Linie, welche durch die Gleichungen

$$y = X', \quad y = X'', \quad y = -X''' \text{ u. s. w.}$$

hervorgebracht sind', insbesondere zu untersuchen, wenn man x alle sowohl positive als negative Werthe giebt, welche die Functionen X', X'', X''', . . . zulassen können, ohne aufzuhören reel zu seyn. Diese Linien werden so viel Zweige der krummen Linie seyn, als die vorgegebene Gleichung vorstellt.

Um sie zu construiren, muß man die negativen Ordinaten auf die Seite von AB Fig. 8, tragen, welche der für die positiven Ordinaten angenommen entgegengesetzt ist, und muß die negativen Werthe von x auf den Theil AB nehmen, welcher sich auf die Seite von AC befindet, der dem Theil, auf welchen man die positiven Werthe aufgetragen hat, entgegengesetzt ist. Hier ist der Beweis welcher D'Alembert von dieser Regel gegeben hat.

Wenn man in der vorgegebenen Gleichung, z — a statt y setzt, oder welches einerley a + y = z annimmt, so könnte man es immer dergestalt machen, daß die Werthe der neuen Unbekannten z in Beziehung auf einer gegebnen Absciße, alle positiv seyn müssen; es wird daher hinlänglich seyn a größer als den größten negativen

Werth

Werth von y zu nehmen. Aber es ist evident, daß, wenn man die Axe AB mit sich selbst parallel, um eine Größe $AA' = a$ zurückziehet, so werden die Ordinaten in Beziehung auf $A'B'$ genommen, die Werthe von z vorstellen, weil man haben wird

$$QM' = AA' + PM' = a + y = z.$$

Es ist jetzt kein Zweifel, daß man alle Werthe von z in Beziehung auf der Abscisse $A'Q$, auf derselben Seite der Axe $A'B'$ tragen muß; den die Entfernungen $M'M''$ und $M'M'''$ . . . der Puncte, welcher dieser Abscisse entsprechend sind gleich den Unterschieden, welche sich zwischen den ersten Werth von z, und einen jeden der andern finden, und wenn man irgend eine der neuen Ordinaten auf die andere Seite setzte, wenn man z. B. $QN = QM'''$, machte, so würde die Entfernung $M'N$ der Summe der Ordinaten QM' und QN gleich werden, welches die Figur der Curve ändern würde, die jedoch dieselbe bleiben soll an welchen Orte man auch die Axen der Coordinaten hinträgt.

Dieses festgesetzt, so ist es einleuchtend, daß der Punct M''' aus dem dritten Werthe von z entstanden, und durch $a - X'''$ vorgestellt, unter AB liegen muß, weil man ihm finden würde, wenn man PM''' von QP abziehet; und weil die Puncte M' und M'', für welche man

$$z = a + X', \quad z = a + X'',$$

hat; auf die andere Seite von AB, in den Entfernungen $PM' = X'$ und $PM'' = X''$ fallen werden.

Wenn man die xen nimmt um die Ordinaten vorzustellen, und man die y als Abscissen betrachtet, so würde man eben so beweisen, daß die negativen Werthe der xen auf die Seite AC fallen müssen, derjenigen auf welche

man

man die positiven Werthe hingetragen hat, entgegengesetzt.

203.

Die Ausdehnung eines jeden Zweiges, wird durch diejenige Ausdehnung bestimmt, welche die verschiedene Auflösungen in sich fassen, deren die Gleichung welche die Ausdehnung vorstellt, fähig ist. Wenn unter den Größen X', X'', X''', u. s. w. sich welche befinden, die unendlich werden, oder in welchen man x sich als unendlich annehmen kann, so werden daraus Zweige entstehen deren Lauf unendlich seyn wird, weil sie sich unbegränzt von einer der Axen, oder von beyden zugleich, werden entfernen können.

Ein Zweig hört nur darum auf, weil der Ausdruck seiner Ordinate imaginair wird, deshalb ist aber der Lauf der vorgegebenen Curve nicht unterbrochen. Es geschiehet alsdenn nur bloß, daß zwey Zweige sich vereinigen und sich beyderseitig fortsetzen. Man wird sich davon überzeugen, wenn man bemerkt, daß die eingebildeten Werthe von y nothwendig in gerader Anzahl sind, und daß diejenigen von einerley Paar, reel und gleich gewesen sind, ehe sie imaginär geworden sind. In der That, da die vorgegebene Gleichung immer in reelle Factoren des ersten und zweyten Grades zerlegt werden kann, wenn man durch

$$y^2 - 2Py + Q = 0$$

einen dieser letzteren Factoren vorstellt, so wird man sehen, daß ihre Wurzeln

$$P \pm \sqrt{P^2 - Q}$$

nur darum imaginair werden, weil P^2 größer wird als Q da doch P^2 zuerst kleiner war, und, daß daher ein

Punct

Punct vorhanden ist, wo die Functionen von x, welche die Buchstaben P und Q bezeichnen, so beschaffen sind, daß man $P^2 = Q$ hat, welches die Radical-Größe vernichtet, und für y zwey gleiche Werthe giebt. Das folgende Beyspiel wird die Zweifel heben, welche durch diese allgemeine Art, die Curven zu betrachten, entstehen könnten.

204.

Es sey die Gleichung

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0;$$

wenn man sie in Beziehung auf y, nach Art der Gleichungen des zweyten Grades auflöset, so wird man daraus die vier folgenden Gleichungen ziehen

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (1)$$

$$y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (2)$$

$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (3)$$

$$y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (4)$$

Man muß nach dem was vorhergehet, den Lauf der Linie, welchen eine jede von ihnen insbesondre ausdrückt, untersuchen, wenn man x negativ als auch positiv annimmt.

Man siehet sogleich, daß die Zweige welche die Gleichung (1) und die Gleichung (3) vorstellen, ähnlich sind, und daß die eine über AB gesetzt ist, Fig. 9. während die andere darunter ist; eben so verhält es sich auch in Beziehung auf den Zweigen welche die Gleichungen (2) und (4) hervorbringen. Es wird daher hinreichen die Gleichungen (1) und (2) zu betrachten. Den Werth von y aus der Gleichung (1) gezogen, wird reel seyn, so lange als die Größe

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^2$$

positiv seyn wird, und da sie nicht negativ werden kann, bevor sie nicht Null gewesen ist, so werden die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4 = 0$$

die Gränzen der Werthe, welche man x geben kann, seyn. Man wird finden, daß diese Gleichung zum Factor hat

$$x - 6a, \quad x + 6a, \quad x - 8a, \quad x + 8a;$$

die Größe

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4,$$

wird also so lange positiv seyn, bis x unter $6a$ seyn wird, weil sie alsdann zwey positive und zwey negative Factoren haben wird; aber sie wird negativ werden, wenn man nimmt $x > 6a$ und $< 8a$, weil der einzige Factor $x - 8a$ negativ sryn wird. Sie wird endlich wieder für immer positiv, wenn man darin $x > 8a$ annimmt. Man muß beobachten, daß, wenn man macht $x = 0$, $x = 6a$ und $x = 8a$, die Gleichung (1)

$$y = \sqrt{96a^2}, \quad y = \sqrt{48a^2}, \quad y = \sqrt{48a^2},$$

giebt. Man wird also aus der Gleichung (1) 1, einen Zweig der sich vom Puncte D aus in der Axe AC genommen, bis auf eine Entfernung von dem Puncte A, gleich $\sqrt{96a^2}$, zu den Punct F erstrecken wird, dessen Absciße AE $= 6a$ ist. 2, Ein andrer Zweig HX, welcher, da er vom Puncte H ausgehet, dessen Absciße AG $= 8a$, und Ordinate GH $= a\sqrt{48a^2}$, ist, sich unendlich im Winkel BAC, wo die $x$en und die y positiv sind, ausdehnt,

Wir wollen jetzt zur Gleichung (2) übergehen; man sieht erstens daß sie imaginaire Werthe für y, unter denselben Umständen als die Gleichung (1) geben wird, d. h. so lange als x zwischen $6a$ und $8a$ eingeschlossen seyn wird

und

und daß sie überdem noch imaginair seyn wird, wenn

$$\sqrt{x^4 - 100\,a^2 x^2 + 2304\,a^4},$$

$48\,a^2$ übertreffen wird. Um die Gränze zu haben, wird man

$$48\,a^2 = \sqrt{x^4 - 100\,a^2 x^2 + 2304\,a^4}$$

oder

$$x^4 - 100\,a^2 x^2 = 0,$$

machen, welches geben wird

$$x^2 = 0, \text{ und } x^2 - 100\,a^2 = 0,$$

woraus man ziehet $x = 10\,a$. Weil in dieser Gleichung y Null ist, wenn x Null ist, und sie imaginair wird, wenn x, $6\,a$ übertrift, so wird sie einen Zweig hervorbringen der sich bey der Abscisse $AE = 6\,a$ endigen wird: und man muß wohl bemerken, daß sie für diese Abscisse noch

$$y = \sqrt{48\,a^2}$$

geben wird, und daß folglich dieser Zweig sich in F mit demjenigen, welchen man weiter oben aus der Gleichung (1) abgezogen hat, vereinigen wird. Wenn man in der Gleichung (2) $x = 8\,a$ voraussetzen wird, und wenn die Größe

$$x^4 - 100\,a^2 x^2 + 2304\,a^4$$

von neuem verschwindet, so wird daraus

$$y = \sqrt{48\,a^2}$$

entstehen, welches zeigt, daß, da der Punct H dem Zweige HX gehöret, der durch die Gleichung (1) hervorgebracht ist, zu gleicher Zeit der erste Punct des zweyten, aus der Gleichung (2) gezogenen Zweige ist. Dieser Zweig kann sich nicht bis über die Abscisse $AI = 10\,a$ ausdehnen, weil er, über dieser Gränze hinaus, y imaginair wird; aber bey dem Puncte I ist er Null, also giebt die Gleichung (2) wenn man in ihr x positiv macht, von $x = 8\,a$ bis $x = 10\,a$, den Zweig HI.

Die

Die Voraussetzung von x negativ, würde dieselben Resultate hervorbringen, als die von x positiv, weil die vorgegebene Gleichung nur die gleichen Größen von x enthält, man würde also in dem Winkel bAC, wo x negativ und y positiv ist, Zweige finden, die denjenigen gänzlich ähnlich, deren Entstehung man so eben in dem Winkel CAB gezeigt hat, wo die xen und die y positiv sind.

205.

Um besser die Gestalt der vorgegebenen Curve zu kennen, so kann man sie durch Puncte construiren, d. h. eine gewisse Anzahl Puncte bestimmen, die, wenn sie untereinander verbunden werden, um so mehr sich nähern ihre Umrisse auszudrücken, je enger sie sind.

Um diese Arbeit bequem zu verrichten, so nehme man a für die Einheit, und mache nach und nach

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4, \text{ u. s. w.}$$

man berechnet nachgehends den Werth von y wenigstens durch Näherung.

Wenn x =

0	1	2	3	4	5	6	7	7	9	10	11	12 u. s. w.

so giebt die Gleichung (1) y =

9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	imaginair	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	u. s. w.

und die Gleichung (2) giebt y =

0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	imaginair	6,928	4,510	0	imaginair	imaginair	u. s. w.

Man wird diese Resultate construiren, indem man willkührlich eine Linie nimmt um die Einheit vorzustellen, und solche von jeder Seite des Punctes A auf die Axe AB trägt, so oft als es nöthig seyn wird den Werth von x auszudrücken; durch die Puncte wo sich diese Werthe endigen, zieht man parallel mit der Axe AC gerade Linien, auf welcher man sowohl über als unter AB die Werthe von y tragen muß.

206.

Die so eben abgehandelte Curve hat nicht mehr als vier unendliche Zweige, aber es finden sich auch welche von derselben Ordnung, die bisacht Zweige haben, dergleichen sind diejenigen welche ausder Gleichung hervorgehen

$$y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0$$

deren Wurzeln in der folgenden Formel mit begriffen sind

$$y = \pm \sqrt{x^2 \pm \sqrt{a^2x^2 - b^4}}$$

In der That, diese Formel giebt für y vier wirkliche und unendliche Werthe, wenn man darin x positiv und unendlich macht, und sie giebt noch in der Voraussetzung von x negativ und unendlich eine gleiche Anzahl.

Man wird weiter hin in diesem Capitel sehen, daß die Zahl der unendlichen Zweige von einer Curve, nicht die doppelte Zahl von derjenigen übertreffen kann, welche den Grad ihrer Gleichung anzeigt.

207.

Wir werden noch über die Gleichung

$$y^4 - 2x^2y + x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0$$

eine wichtige Bemerkung machen: das nemlich in dem

Fall

Fall wo b gleich Null wäre, sie nicht mehr wie vorher eine einzige Curve vorstellen würde, aber sie würde zu dem System der beyden Curven der zweyten Ordnung gehören: denn sie würde sich auf

$$y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - a^2x^2 = 0$$

reduciren und sich in zwey Factoren

$$y^2 - xy + ax \text{ und } y^2 - xy - ax$$

zerlegen, welche, wenn man sie gleich Null setzt, die Gleichungen der beyden unterschiedenen Curven seyn würden; und weil diese Gleichungen alle beyde der Vorgegebenen genug thun, so folgt daraus, daß das Ensembel der Puncte von jeder der Curven, welche sie ausdrücken, auch genug thut.

Ueberhaupt, eine Gleichung kann nicht eine einzige Curve vorstellen, so lange als alle ihre Factoren in Beziehung auf eine der unbestimmten Größen x oder y irrational sind; wenn diese Bedingung nicht statt findet, so giebt sie so viele unterschiedene Curven, als sie gleiche Factoren in x und y hat.

Es giebt selbsten in allen Graden, Gleichungen, welche nichts als eine Versammlung von graden Linien ausdrücken, und diese sind diejenigen, welche sich in Factoren von der Gestalt

$$y - ax + b,$$

zerlegen lassen, wo a und b rationale oder irrationale aber doch beständige Größen sind.

Der aller einfachste von diesen Fällen, und den man den Augenblick, nach der Bemerkung, welche wir in Nr. 66. über die gleichartigen Functionen gemacht haben, erkennt, findet statt, wenn die vorgegebene Gleichung gleichartig in Beziehung auf x und y ist, und sie kein beständiges Glied hat. Wenn man z. B. die Gleichung

$$y^3 - pxy^2 + qx^2y - rx^3 = 0,$$

hätte, so würde sie durch die Annahme von $y = ax$ durch x^3 theilbar und brächte sie auf

$$a^3 - pa^2 + qa^2 - r = 0.$$

Bezeichnet man also durch a', a'', a''', die Werthe von a, welche diese letzte Gleichung geben wird, wenn sie reel sind, so wird die vorgegebene Gleichung zu drey graden Linien gehören, welche zur Gleichung haben,

$$y = a'x, \quad y = a''x, \quad y = a'''x,$$

oder zu einer einzigen, wenn a nur einen reellen Werth hat.

In dem allgemeinen Fall, wenn man $ax + b$, anstatt y substituirt, so soll man a und b vermittelst der beständigen Größen der vorgegebenen Gleichung bestimmen können, so daß sie befriediget sey, welches auch der Werth von x seyn mag; wenn man also nach der Substitution den Coefficienten von jeder Potenz von x, gleich Null setzt, so wird man die Gleichungen haben, welche die diesem Umstande relativen Bedingungen ausdrücken, und welche die Werthe von a und b geben.

208.

Nach der Betrachtung der Anzahl und der Ausdehnung der Zweige einer Curve, stellt sich die mit ihren singulairen Puncten dar. Man nennt so, die Puncte ihrer Bahn, welche etliche merkwürdige Particularitäten darbieten. Die Curve welche uns zum Beyspiel in Nr. 204 gedient, hat davon verschiedene Gattungen.

Der Punct A (Fig. 9) in welchen sich mehrere Zweige schneiden, ist ein vielfacher Punct, und er ist leicht zu erkennen, denn indem man $x = 0$ macht, so geben die Gleichungen (2) und (4) zugleich $y = 0$.

Die

Die Puncte F und H, sind nicht vielfache Puncte, obgleich sich dort zwey Zweige darin vereinigen (Nr. 204); es sind nur zwey Grenzen von der vorgegebenen Curve, nach der Richtung der Axe AB, und sie würden diese Eigenschaft verlieren, wenn man die Richtung der Ordinaten veränderte.

Der Zweig IH bietet uns eine besondere Gattung von Singularpunct dar. Nachdem man seine Höhlung gegen die Axe AC gerichtet hat, so zeigt sie ihm hernach seine Convexität; diese Veränderung heißt Inflexion (Beugung), und der Punct K, wo er ankömmt, heißt Inflexionspunct. (Beugungspunct).

209.

Indem man die beständigen Größen einer Gleichung von zwey unbestimmten Größen verschiedene Werthe giebt, so leitet man daraus Curven ab, welche, obgleich von sehr verschiedenen Formen, demohngeachtet doch einen gemeinschaftlichen Character haben; und die Art, davon die Umstände, welche der allgemeinste Fall zeigt, sich in jedem besondern Fall modificirt finden, verdient bemerkt zu werden. Die Gleichung

$$ay^2 - y^3 + (b - c)x^2 + bcx = 0$$

wird uns von diesen unterschiedenen Veränderungen ein sehr einfaches Beyspiel geben.

Sie giebt

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - (b - c)x - bcx}{a}} = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}}$$

Man sieht sogleich daß die Curve, welche sie vorstellt auf jeder Seite der Axe AB gleiche Theile haben muß, und daß, die Werthe der Ordinate y auf die Seite der positiven x imaginair seyn werden, so lange man $x < b$ macht;

daß aber von Seiten der negativen x, sie reel von $x = 0$ bis $x = -c$ seyn werden, über welches Glied hinaus sie auf immer wieder imaginair werden. Der Ausdruck von y ist leicht zu verzeichnen, indem man ihn für eine zureichende Anzahl von Absciſſen macht, so wird man finden, daß, die Curve welche die vorgegebene Gleichung giebt, diejenige ist, welche Figur 10 vorstellt, und daß sie auf die Seite der negativen xen ein Oval hat, dessen Durchmesser $AF = c$, und auf die Seite der positiven xen zwey unendliche Zweige hat.

Wenn man $c = 0$ macht, so reducirt sich die vorgegebene Gleichung auf

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0;$$

woraus man

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}}$$

ziehet. Diese Formel die immer eingebildet ist, wenn x negativ ist, giebt $y = 0$, wenn man darin $x = 0$ macht, und wird hernach wieder eingebildet, bis man $x > b$ macht. Der Punct A Fig. 11, wo x und y zugleich Null sind, welches der Gleichung

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0,$$

genugthuend ist, soll, obgleich isolirt, einen Theil von der durch diese Gleichung entstehenden Linie ausmachen. Dieser Umstand, der im ersten Augenblick singulair scheint, ist leicht zu begreifen, wenn man darauf aufmerksam ist, daß je kleiner die beständige Größe c ist, je kleiner ist das Oval AF von Figur 10; und man begreift, daß es sich in einen Punct reduciren muß, wenn sein Durchmesser c Null wird.

Man sieht also, daß die durch die Gleichung gegebene Curve

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = o,$$

noch Spuren aufbewahrt, von der Form die diejenige annimmt, welche die allgemeinere Gleichung

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = o$$

vorstellt, von welcher sie hergeleitet ist.*)

Wenn, indem man b = o voraussetzt, man c beybehält, so wird man die Gleichung

$$ay^2 - x^3 - cx^o = o$$

haben; da in diesem Falle die Zweige EX, und EX' der Curve von Figur 10 durch den Punct A gehen, so würden sie sich wieder mit den zwey Hälften des Oval, AF vereinigen, und die Figur 12 bilden.

G 4 Endlich,

*) Die isolirten Puncte, so wie der Punct A in dem obigen Beyspiele, heißen conjugirte Puncte. Es giebt Gleichungen, die nur eine bestimmte Anzahl von diesen Puncten ausdrücken. Wenn man z. B. die Gleichung

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = o$$

hätte, so könnte man ihr hier nicht anders Genüge thun, als indem man

$$x^2 - a^2 = o, \quad y^2 - b^2 = o$$

macht, denn da ein Quadrat nie negativ werden kann, so kann die Summe von so vielen Quadraten als man will, nicht anders Null seyn, wenn nicht jedes von ihnen es für sich ist. Diese Gleichung wird also

$$x = \pm a, \quad y = \pm b$$

geben. Es ist leicht zu sehen, daß, indem man in diese Resultate alle möglichen Zeichen Verbindungen macht, man daraus niemals mehr als vier respective in den vier Winkeln der Coordinaten gelegenen Puncten zieht. Ich bemerke noch, daß die vorgegebene Gleichung, als ein besonderer Fall von dieser andern viel allgemeinern

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4,$$

angesehen werden kann, die eine aus vier geschlossenen Theilen zusammengesetzte Curve geben würde.

Endlich, wenn man c, in der Gleichung

$$ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$$

nach und nach immer kleinere Werthe giebt, so wird sich das Blatt AF nach und nach immer mehr zusammenziehen, und durch Verschwinden endigen, wenn man $c = 0$ machen wird; es ist auch leicht sich davon zu versichern, indem man die gegebene und durch Figur 13 vorgestellten Curve durch die sehr einfache Gleichung

$$ay^2 - x^3 = 0$$

untersucht.

Wenn man y als Abscisse ansieht und x als die Ordinate, so wird, wenn die Gleichung

$$ay^2 - x^3 + (b - c)x^2 + bcx = 0$$

in Ansehung dieser letzteren Unbekannten, vom dritten Grade ist, sie davon drey Werthe für jede von denen der erstern Gleichung geben, und wenn man $y = 0$ macht so wird daher die Gleichung

$$-x^3 + (b - c)x^2 + bcx = 0$$

entstehen, deren Wurzeln

$$x = a, \quad x = b, \quad x = -c$$

die Entfernungen der Puncte A, E und F von der Axe AC, Fig. 10, ausdrücken.

Wenn man $b = 0$ macht, so werden die zwey Wurzeln

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = b$$

gleich, und zeigen an, daß der Punct F und der Punct A sich vereinigt haben, und wenn man hernach $c = 0$ voraussetzt, so zeigt die Gleichheit der drey Wurzeln

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c,$$

daß die Puncte A, E und F nicht mehr als einen derselben ausmachen.

In den verschiedenen Veränderungen, welche die durch die Gleichung

$$ay^2 - x^3 + (b - c)x^0 + bcx = 0$$

gegebene Curve erleidet, wenn man successive h und b Null macht, so wird der Punct B zuerst ein conjugirter Punct, und hernach ein Knoten; er ist in einem und dem andern Falle vielfach, weil er zwey Puncte von der gegebenen Curve vereinigt: endlich, wenn man die durch die Gleichung

$$ay^2 - x^3 = 0$$

vorgestellte Curve durch Puncte beschreibt, welches leicht ist, weil man

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

hat, so wird man sehen, daß, die beyden Zweige AX und AX′ Fig. 13, welche sich nicht auf die Seite der negativen xen erstrecken, ihre Convexitäten einander entgegengesetzt haben, und der Punct A, in welchen sie sich vereinigen, ist alsdenn ein Rückkehrpunct der ersten Art (point de rebroussement de la première espèce).

Man sieht in A Fig. 14, einen Rückkehrpunct der zweyten Art, die sich von der ersten darin unterscheidet, daß einer von den Zweigen AX z. B. seine Convexität gegen die Concavität der andern zukehrt.

Die in der Figur vorgestellte Curve ist aus der Gleichung

$$(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{a}$$

hergeleitet, daraus man zieht

$$y = \frac{x^2}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}x^5} = \frac{x^2}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{a}x^3}.$$

210.

Von der Transformation der Coordinaten, und von ihre nvornehmsten Gebrauch.

Da die Lage der Axen der Coordinaten willkührlich ist, so folgt daraus, daß man sie ändern kann, ohne die Natur der Curve, welche man betrachtet, zu verändern, und daß folglich dieselbe Curve unterschiedene Gleichungen haben muß, unter welchen sich daher nothwendiger Weise einfachere, als die andern finden werden. Die Curve von Nr. 204 würde z. B. eine viel zusammengesetztere Gleichung haben, wenn sie auf andere Axen bezogen wäre als die von Fig. 9, welche sich in vier unter sich ähnliche Theile theilen; versetzt man bloß die Axe der Abscissen AB mit sich selbst parallel, in der Lage A′B′, so werden sich die Werthe der denselben Abscissen relativen Ordinaten um die Größe AA′ vermehrt finden, und die Positiven würden nicht mehr mit den Negativen gleich seyn.

Die größte Veränderung die man in den System der Coordinaten bringen könnte, ohne aufzuhören, sie als gerade und respective zwey fixen Linien parallel zu nehmen, besteht darin, daß, man ihnen einen neuen Ursprung und andere Richtungen giebt. Wir wollen sogleich diesen allgemeinen Fall umfassen, und wollen annehmen, daß man sich vorsetze, die Werthe der Coordinaten

$AP = x, \quad PM = y$ Fig. 15.

auszudrücken, in Beziehung auf die Axen AB und AC durch zwey andere Coordinaten

$A'''P'' = u, \quad P''M = t,$

auf die Axen A‴B″, A‴C″ bezogen, von welchen man die Lage in Ansehung der ersteren kennt.

Nach-

Nachdem man durch den neuen Ursprung A''' die geraden Linien $A''B'$ und $A'''C'$ respective mit AB, und AC parallel, gezogen hat, so werden die Entfernungen AA' und AA''' durch die Hypöthese gegeben seyn, und indem man sie durch a und b vorstellt, so wird man haben

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + a,$$
$$PM = P'M + A'A''' = P'M + b.$$

Zieht man nachgehends durch den Fuß der neuen Ordinate $P'M$, die Linien $P''Q$ und $P''R$, die eine parallel mit AB und die andere mit AC, so wird man beobachten, daß, da die Axen $A'''B''$ und $A'''C'$ in Betracht von AB und AC der Lage nach gegeben sind, man alle Winkeln der Dreyecke $A'''P''R$, $MP''Q$ kennen muß, oder welches auf eins herauskömmt, die Verhältnisse ihrer respectiven Seiten: man mache also

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m, \quad \frac{P''R}{A'''P''} = n, \quad \frac{P''Q}{P''M} = p, \quad \frac{QM}{P''M} = q$$

so wird man haben

$$A'''R = m.A'''P'' = mu, \quad P''R = n.A'''P'' = nu,$$
$$P''Q = p.P''M = pt, \quad QM = q.P''M = qt,$$

woraus man ziehen wird

$$A'''P' = A'''R + P''Q = mu + pt,$$
$$P'M = P''R + QM = nu + qt.$$

und endlich

$$x + AP = A'''P' + a = mu + pt + a$$
$$y = PM = P'M + b = nu + qt + b.$$

So sind die allgemeinsten Werthe, welche die Coordinaten x und y nehmen können, beschaffen, indem die Coordinaten unter sich einen beliebigen Winkel machen, wenn man sie durch andere Coordinaten desselben Geschlechts, aber von beliebiger Lage ausdrückt. Wir wollen jetzt sehen wie man diejenigen davon ableitet, die den verschie-

denen

denen besondern Fällen, welche sich darstellen zustimmen können.

1. Wenn man die neuen Coordinaten mit den ersteren parallel annimmt, und, wenn man nichts weiter als die Lage des Ursprungs änderte, so würden die Linien $A'''C''$ und $A'''C'$ in einander fallen, sowohl $A'''B''$ und $A'''B'$; man würde folglich haben

$$m = 1, \quad n = 0, \quad p = 0 \text{ und } q = 1,$$

und es würde daraus erfolgen

$$x = u + a, \quad y = t + b$$

welches leicht à priori zu sehen ist, weil alsdann $A'''P''$ und $A'''P'$ sowohl als $P''M$ und $P'M$ zusammenfallen würden.

Indem man a oder b gleich Null setzt, so wird man in ihre Stelle die Axe AC oder die Axe AB beybehalten.

2. Wenn man nichts anders als die Richtung der Axen AB und AC verändern wollte, und man immer den Ursprung an den Punct A liesse, so würde man zu gleicher Zeit, da die Linien $A'''B'$ und $A'''C''$ in diesem Falle auf AB und auf AC fallen, $a = 0$ und $b = 0$ haben, welches

$$x = mu + pt, \quad y = nu + qt$$

geben würde.

Man sieht, daß wenn man $m = 1$ und $n = 0$ annimmt, woraus

$$x = u + pt, \quad y = qt$$

entstehen würde, alsdann die Linie $A'''B''$ die Linie $A'''B'$ decken würde, und, daß, man folglich nur die Richtung der Ordinaten geändert haben würde; eben so würde man beweisen, daß

$$x = mu \text{ und } y = nu + t$$

die Werthe von x und von y sind, welche der Veränderung der Richtung der Abscissen relativ sind.

211.

211.

Man muß beobachten, daß zwischen den Größen m, n, p und q. welche von der Richtung der neuen Coordinaten abhängen, eine nothwendige Relation ist, so, daß man sie nicht alle viere willkührlich nehmen kann; denn wenn, indem man den Winkel der primitiven Axen $A'''B'$ und $A'''C'$ kennt, man sich noch die Winkel $B''A'''B'$ und $C''A'''B''$ gäbe, so würde die Lage der neuen Axen $A'''B''$ und $A'''C''$ durch die drey Dinge gänzlich bestimmt. Wenn man von einem bekannten System der Coordinaten zu einem andern ebenfalls bekannten System übergeht, so werden die Größen m, n, p und q, nach ihren Definitionen berechnet unter sich die Relation haben, von welcher man so eben gesprochen hat; aber es folgt aus dem was vorhergeht, daß, wenn die Lage des Ursprungs gegeben ist, man nicht die Richtung der neuen Axen auf solche Art bestimmen kann, daß sie mehr als zwey unterschiedene Bedingungen befriedigte, und daß in den Ausdrücken

$$x = mu + pt + a, \quad y = nu + qt + b,$$

die Größen x und y, u und t, nicht die Coordinaten eines und desselben Punctes in Beziehung auf zwey Systeme von graden und parallelen Coordinaten seyn können, so lange als m, n, p und q beliebig seyn. Hier ist ein sehr einfaches Mittel die Relation zu finden, welche unter diesen Größen existiren soll.

Wenn man durch den Punct M die Graden MG und MH respective Winkelrecht auf $A'''B'$ und $A'''B''$ führt und daß man die Winkel

$$MP'B' = C'A'''B' \text{ und } MP''B'' = C''A'''B$$

als bekannt annimmt, so wird man das Verhältniß von

PM

$P'M$ zu PG haben, und das von $P''M$ zu $P''H$; nennt man den Verhältnißnahmen des ersten g, und den des zweyten h, so wird

$$P'G = g.P'M \text{ und } P''H = h.P'''M;$$

zieht man nachgehends daraus $A'''M$ und stellt $A'''P'$ und $P'M$ durch x und y vor, so werden die schiefen Dreiecke $A'''P'M$ und $A'''P''M$ geben

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P'}^2 + \overline{P'M}^2 + 2A'''P' \times P'C = x'^2 + y'^2 + 2gx'y'$$

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P''}^2 + \overline{P''M}^2 + 2A'''P'' \times P''H = u^2 + t^2 + 2put.$$

Indem man diese beyden Ausdrücke von $A'''M$ gleich setzt, so wird

$$x'^2 + y'^2 + 2gx'y' = u^2 + t^2 + 2htu$$

ommen; setzt man für x' und y' ihre Werthe

$$mu + pt \text{ und } nu + qt$$

so wird man

$$(m^2 + n^2 + 2mng)u^2 + (p^2 + q^2 + 2pqg)t^2 +$$
$$2[mp + nq + g(np + mq)]\,ut = u^2 + t^2 + 2hut$$

haben. Da diese Gleichung statt finden soll, wie auch immer die Lage des Puncts M seyn mag, so muß sie sich immer unabhängig von u und von t bestätigen, eine Bedingung, welche die drey Gleichungen

$$m^2 + n^2 + 2mng = 1,$$
$$p^2 + q^2 + 2pqg = 1,$$
$$mp + nq + (np + mq)g = h$$

giebt. Indem man g aus den beyden erstern Gleichungen wegbringt, so wird das Resultat

$$(m^2 + n^2)pq - (p^2 + q^2)mn = pq - mn,$$

die Bedingungen ausdrücken, welchen die Größen m, n, p und q Genüge thun sollen.

Man setzt mehrentheils voraus, daß die neuen Coordinaten u und t sich, so wie die ersteren, unter rechten Winkeln

keln begegnen. In diesen Fall vereinfachen sich die obigen Gleichungen sehr. Wenn die Winkel $MP'B'$ und $MP''B''$ rechte Winkel werden, so verschwinden $P'G$ oder g, und $P''H$ oder h, dergestalt, daß man nur hat

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1, \quad mp + nq = 0,$$

woraus man ziehet

$$m^2 = 1 - n^2, \quad p^2 = 1 - q^2, \quad m^2p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2q^2,$$

und wegen

$$mp = -nq,$$

kömmt

$$n^2 + q^2 = 1;$$

wenn man dieses Resultat mit der Gleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

vergleichet, so findet man $q = m$, dieses giebt $p = -n$: man wird endlich

$$x' = mu - nt, \quad y' = nu + mt$$

haben, indem man beobachtet, daß die Größen m und n eine von der andern, kraft der Gleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

abhängt. Die Fig. 16 die für diesen besondern Fall, construirt ist, läßt sehen, daß m der Cosinus des Winkels $B'A'''B''$, und n der Sinus davon ist, und daß man hat

$$A'''P' = A'''R - P'R = A'''R - P''Q = mu - nt,$$

und

$$P'M = P''R + QM = nu + mt,$$

so wie wir es so eben gefunden haben.

212.

Den ersten Gebrauch, welchen wir von der Transformation der Coordinaten machen wollen; wird seyn: die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung.

$$A + 2Bx + 2Cy + Dx^2 + 2Exy + Ey^2 = 0 \ldots (1)$$

auf

auf ihre einfachste Formen zu reduciren. Wir werden zuerst die Lage des Ursprungs der Coordinaten verändern, indem wir die Axen mit sich selbst parallel versetzen, dieserwegen wollen wir in der obigen Gleichung $x' + a$ statt x, und $y' + b$ statt y setzen; alsdann wird sie werden

$$\left. \begin{array}{r} A+2Ba+2Cb+Da^2+2Eab+Fb^2+(B+Da+Eb)2x'+Dx'^2 \\ +(C+Ea+Fb)2y'+2Ex'y' \\ +Fy'^2 \end{array} \right\} = 0 \ldots (2)$$

Da die Größen a und b willkührlich sind, so können wir sie dergestalt bestimmen, daß zwey Glieder aus diesem Resultate verschwinden. Wir wollen voraussetzen, daß man die, welche x und y, abgesondert von der ersten Potenz enthalten, weggebracht werden sollen; wenn man ihren Coefficient gleich Null setzt, so wird man haben

$B + Da + Eb = 0 \ldots (3)$, $C + Ea + Fb = 0 \ldots (4)$,

und es werden in der Gleichung (2) nur die Glieder des zweyten Grades x'^2, $x'y'$, y'^2, und das ganz bekannte Glied, bleiben. Dieses letztere Glied vereinfacht sich sehr, vermittelst der Gleichungen (3) und (4).

In Wahrheit, multiplicirt man die Erste durch a, die Zweyte durch b und ziehet man ihre Summe von der Gleichung (2) ab, so wird, nachdem man die Glieder, welche verschwinden sollen, darin unterdrückt hat, heraus kommen

$$A + Ba + Cb + Dx'^2 + 2Ex'y' + Fy'^2 = 0 \ldots (5)$$

213.

Wenn man den Axen andere Richtungen giebt, die immer untereinander Winkelrecht sind, d. h. wenn man macht

$x' = mu - nt$, $y' = nu + mt$ (vorhergehende Num.)

so

so können wir noch ein Glied verschwinden lassen, denn da man nur die Gleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

zwischen den Größen m und n hat, eine davon zu bestimmen übrig bleiben wird.

Wenn die Substitution gemacht ist, so wird man haben:

$$\left.\begin{array}{l} A+Ba+Cb+[Dm^2+2Emn+Fn^2]u^2 \\ \quad + [(F-D)mn+E(m^2-n^2)]2ut \\ \quad + [Dn^2-2Emn+Fm^2]t^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (6)$$

Ich setze die Gleichung

$$(F-D)mn + E(m^2 - n^2) = 0 \ldots (7)$$

vermittelst welcher das Glied worin ut vorkommt verschwindet, und wenn ich zur Verkürzung

$A+Ba+Cb=\alpha$, $Dm^2+2Emn+Fn^2=\beta$, $Dn^2-2Emn+Fm^2=\gamma$,

mache, so habe ich

$$\alpha + \beta u^2 + \gamma t^2 = 0 \ldots\ldots (8)$$

Da diese Gleichung nur noch die Quadrate der unbestimmten Größen u und t enthält, so wird sie für die eine oder für die andern zwey gleiche Werthe und von entgegengesetzten Zeichen, geben. Damit diese Werthe reel seyn können, muß sich wenigstens eine dieser drey Größen α, β, und γ darinnen befinden, die negativ sey; zufolge der Zeichen womit sie behaftet sind, wird man haben:

$$t=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}u^2}, \text{ oder } t=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}u^2-\frac{\alpha}{\gamma}}, \text{ oder}$$

$$t=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}u^2}.$$

Ich werde mich nicht aufhalten, einen jeden dieser Fälle insbesondre zu untersuchen; man sieht wohl, daß der erste Fall sich auf die Ellipse oder auf den Kreis beziehet, und daß die beyden letztern der Hyperbel zugehören. In dem

Einen ist die Coordinate u auf der ersten Axe genommen und in dem Andern ist sie auf der zweiten genommen.

Um zu wissen in welchen Fällen die Größen β und γ positiv oder negativ seyn können, muß man m und n bestimmen, und ihre Werthe in diese Größen substituiren. Die Gleichung (7) giebt

$$mn = \frac{E}{D-F}(m^2 - n^2);$$

wenn man macht

$$\frac{E}{D-F} = \delta,$$

und wenn man n^2 vermittelst der Gleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

wegbringt, so wird kommen

$$m^4 - m^2 = -\frac{\delta^2}{1+4\delta^2};$$

woraus man ziehen wird

$$m^2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \frac{\delta^2}{1+4\delta^2}} = \tfrac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}};$$

und, wenn man nachher

$$n^2 = \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}}$$

$$m^2 n^2 = \tfrac{1}{4} - \frac{1}{4(1+4\delta^2)} = \frac{\delta^2}{1+4\delta^2}$$

statt δ die Größe, welche sie vorstellt wieder hinsetzt, und wenn man nur auf die obern Zeichen der Radicalen Rücksicht nimmt, so wird daraus entstehen

$$m^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{D-F}{2\sqrt{(D-F)^2+4E^2}}$$

$$n^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{D-F}{2\sqrt{(D-F)^2+4E^2}}$$

$$mn = \frac{E}{\sqrt{(D - F)^2 + 4E^2}}$$

Wenn man diese Werthe in die Ausdrücke von β und γ setzt, und sie nachher unter einerley Nenner bringt, so wird man mit etwas Aufmerksamkeit sehen, daß ihre Zähler durch

$$\sqrt{(D - F)^2 + 4E^2}$$

theilbar sind, und daß

$$\beta = \tfrac{1}{2}(D + F) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(D - F)^2 + 4E^2},$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(D + F) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(D - F)^2 + 4E^2}$$

so lange als D und F positiv seyn werden, β es wird auch seyn, und γ wird nur dann erst negativ werden wenn man haben wird

$$(D + F)^2 < (D - F)^2 + 4E^2 \text{ oder } DF < E^2.$$

214.

Wenn man hätte $DF = E^2$, so würde die Größe γ sich vernichten, und es würde scheinen als wenn die Gleichung (8) nur die eine unbekannte Größe u enthielte; aber die Gleichungen (3) und (4) (Nr. 212) geben,

$$a = \frac{BF - EC}{E^2 - DF}, \qquad b = \frac{CD - EB}{E^2 - DE}$$

Werthe, die unendlich werden, wenn $DF = E^2$. Man kann also nicht in diesen Fall die Glieder $2Bx$ und $2Cy$ in der Gleichung (1), zu gleicher Zeit verschwindend machen.

Man wird die Gestalt, welche die Gleichung (1), in diesem Fall nehmen muß, finden, wenn man darin zuerst

$$x = mu - nt, \quad y = nu + mt,$$

macht, welches geben wird

$$\left.\begin{array}{l} A+(Bm+Cn)2u+[Dm^2+2Emn+Fn^2]u^2 \\ \quad -(Bn-Cm)2t+[(F-D)mn+E(m^2-n^2)]2ut \\ \qquad +[Dn^2-2Emn+Fm^2]t^2 \end{array}\right\} = 0.$$

das mit ut behaftete Glied, wird vermittelst der so eben gefundenen Werthe von m und von n, verschwinden und die Coefficienten von u^2 und t^2 werden noch durch β und γ ausgedrückt werden, dergestalt, daß man haben wird

$$A + (Bm + Cn)2u - (Bn - Cm)2t + \beta u^2 + \gamma t^2 = 0.$$

Man wird nachher den Ursprung verändern, wenn man $u' + a'$ für u und $t' + b'$ für t substituirt, um das mit u behaftete Glied, sowohl als das beständige Glied, vermittelst der unbestimmten Größen a' und b' verschwinden zu lassen, und man wird ein Resultat erhalten, welches von der Form

$$-\varepsilon t + \beta u^2 + \gamma t^2 = 0 \ldots (9)$$

seyn wird. Diese letzte Gleichung ist allgemeiner als die Gleichung (8), denn sie stellt alle Curven der zweyten Ordnung vor, und wenn γ Null wird, so wird sie sich auf

$$-\varepsilon t + \beta u^2 = 0$$

reduciren, eine Gleichung welche der Parabal zugehört.

215.

Wenn man auf eine beliebige Art den Ursprung und die Richtung der Coordinatenaxe in der Gleichung (1) verändern wollte, so müßte man an ihre Stelle statt x und y, ihre allgemeinen Werthe setzen,

$$mu + pt + a, \qquad nu + qt + b \text{ (Nr. 210)},$$

und sie würde die Gestalt

$$A' + 2B'u + 2C't + D'u^2 + 2E'ut + F't^2 = 0$$

annehmen in welcher die Buchstaben $A'B'C'$ u. s. w. Functionen der primitiven Coefficienten und der Größen m, n, p, q, a und b vorstellen.

Wenn

Wenn die primitiven Coordinaten unter einander winkelrecht wären, so hätte man $g = 0$, welches

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1, \quad mp + nq = h$$

geben würde, und man würde sehen, das die Bedingungsgleichung

$$(m^2 + n^2)pq - (p^2 + q^2)mn = pq - mn \text{ (Nr. 211)}$$

zufolge der beyden ersteren identisch wird, und wenn noch überdem der Winkel der neuen Coordinaten beliebig bleibt, so wird h unbestimmt seyn, und zwischen den vier Größen m, n, p und q, würden sich nur die Gleichungen

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1$$

befinden. Man könnte also mit irgend zwey unter ihnen schalten wie man wollte so wie mit den Größen a und b, die, wenn sie die Lage des Ursprunges anzeigen, gänzlich unbestimmt sind. Man darf jedoch nicht glauben, daß man immer vermittelst dieser vier willkührlichen Größen, in alle Fälle eine gleiche Anzahl Glieder der weiter oben transformirten Gleichung verschwinden lassen kann, zu dieser Absicht müssen die Gleichungen die aus den gleich Null gesetzten Coefficienten heraus kommen, unter einander zusammengehören, und reelle Werthe für die Größen, welche sie bestimmen, geben. Die größte Reduction die man nur machen kann, bestehet darinn, daß man die Glieder

$$2B'u, \; 2C't, \; D'u^2 \text{ und } F't^2$$

mit einem mahle verschwinden läßt, wenn man die Gleichungen

$$B' = 0, \quad C' = 0, \quad D' = 0, \quad F' = 0,$$

setzt, und alsdann wird die vorgesetzte Gleichung

$$A' + 2E'ut = 0$$

welche wie man weiß, der auf ihren Asymptoten bezogener Hyperbel, gehöret.

Wenn man die Rechnung macht, so wird man finden, daß die Entwickelungen der Gleichungen

$$D' = 0, \text{ und } F' = 0,$$

sind,

$$Dm^2 + 2Emn + Fn^2 = 0, \quad Dp^2 + 2Epq + Fq^2 = 0$$

und daß sie nur alsdann für $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ reelle Werthe geben können wenn E^2, FD übertrift.

Obgleich die Verhältnisse $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ durch dieselbe Gleichung gegeben seyn mögen, so müssen sie jedoch immer ungleich seyn, sonst würde man zufolge der Gleichungen

$$m^2 + n^2 = 1, \text{ und } p^2 + q^2 = 1,$$

haben

$$p = \pm m \text{ und } q = \pm n,$$

woraus man

$$x = m(u \pm t) + a \text{ und } y = n(u \pm t) + b,$$

ziehet. Wenn man $u \pm t$ eliminirt, so würde kommen

$$nx - my = na - mb$$

ein Resultat, welches nicht allgemein mit der Gleichung (1) übereinstimmen kannn; daher muß die Gleichung

$$D\frac{m^2}{n^2} + 2E\frac{m}{n} + F = 0$$

ihre zwey ungleiche Wurzeln haben, und wenn man die eine von ihnen für $\frac{m}{n}$ nimmt, so wird $\frac{p}{q}$ die andere ausdrücken.

216.

Die vorhergehenden Details sind hinlänglich um zu zeigen, wie die Transformation der Coordinaten, unter die Glieder einer vorgelegten Gleichung, diejenigen, die nur

nur von der besondern Lage der Axen abhängen, unterscheiden läßt; ich werde mich also begnügen, den Weg anzuzeigen, welchen man folgen müßte um die allgemeine Gleichung der Linien der dritten Ordnung abzuhandeln

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0 \ (1).$$

Wenn man statt x und y,

$$mu + pt + a \text{ und } nu + qt + b$$

substituirt, so wird die Gestalt

$$A' + B'u + C't + D'u^2 + E'ut + F't^2 + G'u^3 + H'u^2t + I'ut^2 + K't^3 = 0 \ (2),$$

annehmen.

Ich muß bemerken, daß man immer $K' = 0$ annehmen kann und auf diese Art das Glied t^3 wegbringt. In der That, wenn man die Rechnung ausführt, so wird man finden, daß

$$K' = Gp^3 + Hp^2q + Ipq^2 + Kq^3,$$

und daß daher das Verhältniß von $\frac{p}{q}$, welcher durch die Gleichung

$$G\frac{p^3}{q^3} + H\frac{p^2}{q^2} + I\frac{p}{q} + K = 0$$

bestimmt ist, wenigstens einen reellen Werth haben wird.

Wenn man nur von primitiven Coordinaten, zu andern noch winkelrechten Coordinaten übergeht, und wenn man den Ursprung in dem Punct, wo er zuerst war, läßt, so könnte man sich immer des Gliedes $K't^3$, entledigen, denn wenn man

$$a = 0,\ b = 0,\ p = -n \text{ und } q = m \text{ (Nr. 211)}$$

in der weiter oben transformirten Gleichung annimmt, so wird man um $\frac{m}{n}$ zu bestimmen die Gleichung

$$-G\frac{m^3}{n^3}+H\frac{m^2}{n^2}-I\frac{m}{n}+K=0$$

haben.

Daraus folgt, daß die Gegenwart des Gliedes Ky^3, die Gleichung (1) nicht allgemeiner macht; es verhält sich eben so mit den mit y^5 behafteten Gliede, in der Gleichung der fünften Ordnung, und der analogen Glieder in allen ungraden Ordnungen. Dieser Fall hat für die graden Ordnungen nicht statt, denn man hat schon (in der vorhergehenden Nr.) gesehen, daß eines von den Quadraten u^2 oder t^2, nur in einem besondern Fall aus der Gleichung des zweyten Grades verschwinden könnte.

Da die allgemeine Transformation vier willkührliche Größen einführt, so können wir davon noch drey bestimmen, so daß man eine gleiche Anzahl Glieder in der Gleichung (2) verschwinden lassen kann, das Glied $K't^3$ ausgenommen, welches schon durch die Gleichung $K'=0$ weggebracht ist. In der Wahl dieser Glieder zeigen sich mehrere Combinationen. Newton welcher zuerst die Enumeration der Linien der dritten Ordnung machte, brachte sie alle auf die vier folgenden Gleichungen:

$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+F't+Iut^2=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+E'ut=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+F't^2=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+C't\quad=0$$

Die erste entstehet aus der Voraussetzung von

$$K'=0,\quad H'=0,\quad F'=0,\quad E'=0,$$

in der Gleichung (2). Die drey andern stimmen mit den verschiedenen Fällen überein, in welchen die besondern Relationen, die sich zwischen den Coefficienten der Gleichung (1) befinden, mit den Gleichungen, welche die Transformation der Coordinaten geben kann, zusammenlaufen, um

eine

eine größere Anzahl Coefficienten der Gleichung (2) Null zu machen.

217.

Man hat gesucht in den Curven der höheren Ordnungen, Eigenschaften wieder zu finden, die den Eigenschaften der Linien von der zweyten Ordnung analog sind dieses hat zu der Betrachtung der Mittelpuncte und der Durchmesser Anlaß gegeben.

Der Mittelpunct einer Curve ist ein Punct seiner Fläche, so daß alle graden Linien die dadurch gehen, auf beyden Seiten dieses Puncts, gleiche an der vorgegebenen Curve sich endigende, Lagen haben. Der Ursprung der Coordinaten in den Beispiel von Nr. 204, ist der Mittelpunct der durch Fig. 9. vorgestellten Curve; denn wenn man durch diesen Punct eine beliebige grade Linie Mm ziehet, so werden die beyden Theile AM und Am unter einander gleich seyn; und dieses deswegen, weil, wenn man $Ap = AP$ nimmt, so wird man unter AE, Ordinaten pm und pm' respective gleich mit PM und PM' finden.

Die Curve die als Beispiel angeführt ist, verdankt diese Eigenschaft ihrer Gleichung, welche dieselbe bleibt, wenn man darin x und y in $-x$ und $-y$ verwandelt, dieses macht, daß ein jeder negativer Werth von x, eine Ordinate von der nemlichen Größe, als die welche mit dem positiven correspondirenden Werth, aber von entgegengesetzten Zeichen übereinstimmt, giebt, und man sieht, daß dieses in jeglicher Gleichung von graden Graden, geschehen wird, die nur Glieder enthält, wo die Summe der Exponenten von x und y eine grade Zahl macht, oder in jeglicher Gleichung von ungraden Graden, für welche diese Sum-

me immer eine ungrade Zahl seyn wird, dergleichen würden z. B. seyn.

$$x^4 - x^2y^2 + A^2y^2 - B^4 = 0$$
$$\text{und } x^3 - xy^2 + A^2y - y^3 = 0.$$

Daraus folgt, daß, um zu wissen ob eine Curve einen Mittelpunct hat, man versuchen muß, ob, wenn der Ursprung der Coordinaten in einen beliebigen Punct versetzt wird, man nicht alle Glieder von ungraden Grade, verschwinden lassen könnte, in dem Falle, wo die vorgegebene Gleichung von einem graden Grade oder alle Glieder von graden Grade seyn würden, wenn sie von einem ungraden Grade wäre.

In der zweyten Ordnung verschwinden immer die Glieder von ungraden Graden $2Bx$ und $2Cy$, ausgenommen wenn $E^2 = DF$ ist (Nr. 214); auch ist die Parabel welche diesem besondern Falle entspricht, die einzige von den Curven der zweyten Ordnung welche keinen Mittelpunct hat.

Um die Curven der dritten Ordnung die einen Mittelpunct haben, zu erhalten, wird man in der allgemeinen Gleichung der vorhergehenden Nr. anstatt x $x' + a$ und $y' + b'$, statt y substituiren müssen, nachher muß man die Coefficienten eines jeden der vier Glieder von graden Grade $A, B'x^2, Ex'y', Fy'^2$, gleich Null setzen, und da man nur zwey willkührliche Größen eingeführt hat, so werden darin zwey Bedingungs-Gleichungen bleiben. Ich werde mich nicht bey diesen Rechnungen aufhalten, welche keine andere Schwierigkeit als die ihrer Länge haben.

218.

Die Durchmesser der Curven der zweyten Ordnung sind, wie man weiß, solche grade Linien, daß für jeden ihrer Puncte die positive Ordinate der negativen Ordinate gleich ist; ein auf seine Ordinaten winkelrechter Durchmesser wird Axe genannt. In den Curven der höheren Ordnungen hat man die Annahme des Worts Durchmesser ausgedehnt, indem man jede Axe der Abscissen so nennt, wenn sie so beschaffen ist, daß in jedem ihrer Puncte die Summe der positiven Ordinaten gleich der Summe der negativen Ordinaten ist.

Wenn die allgemeine Gleichung der Linien der Ordnung r, in Beziehung auf y geordnet ist so kann sie vorgestellt werden durch:

$$\left.\begin{array}{l} y^r + (A + Bx)y^{r-1} + (C + Dx + Fx^2)y^{r-2} \ldots\ldots \\ + \;\ldots\ldots + P + Qx + Rx^2 \ldots + Ux^n \end{array}\right\} = 0,$$

und es ist evident, daß, wenn man einen besondern Werth von x betrachtet, $A + Bx$ die Summe der übereinstimmenden Werthe von y, mit einen entgegengesetzten Zeichen genommen, ausdrücken wird, $C + Dx + Ex^2$ die Summe ihrer Producte zu zwey und zwey . . . und endlich

$$P + Qx + Rx^2 \ldots + Ux^n,$$

das Product von allen diesen Werthen.

Man könnte viele wichtige Folgen aus dieser die Gleichung einer krummen Linie vorstellenden Art ziehen, aber um bey meinem Gegenstande zu bleiben, so werde ich mich begnügen bemerken zu lassen, daß wenn das mit y^{r-1} behaftete Glied fehlen wird, die vorgegebene Curve auf einen ihrer Durchmesser bezogen wird, weil alsdann die Summe der positiven und negativen Ordinaten für eine beliebige Abscisse Null seyn wird. Wenn das mit

y^{r-1}

y^{r-1} behaftete Glied sich in der Gleichung befindet, so wird man es immer verschwinden lassen können, wenn man die Lage der Axen der Abscissen, und die des Ursprungs der Ordinaten verändert. Die allgemeinen Formeln aus Nr. 210 geben in diesem Falle

$$x = mu \text{ und } y = nu + t + b.$$

Wenn diese Substitution gemacht ist, so wird für die zwey ersten Glieder der transformirten Gleichung, in Beziehung auf t geordnet,

$$t^r + [r(nu + b) + A + Bmu]t^{r-1};$$

Man wird den beständigen Theil des Coefficienten von t^{r-1} und den mit u behafteten für sich gleich Null setzen müssen, welches geben wird

$$rn + Bm = 0, \quad rb + A = 0$$

woraus

$$\frac{n}{m} = -\frac{B}{r}, \quad b = -\frac{A}{r}.$$

Man sieht aus diesen Resultaten, daß es immer möglich seyn wird das mit t^{r-1} behaftete Glied zu entfernen, aber, wenn man die Lage der Ordinaten, welche wir nicht berührt haben verändert, so würde man auch die Lage des Durchmessers verändern; daraus folgt, daß eine einzige Curve, eine unendliche Anzahl Durchmesser hat.

219.

Wenn man mit einemmahle auf eine beliebige Art die Lage der Axe der Abscisse und den Winkel der Coordinaten verändert, d. h. wenn man $mu + pt$ statt x, und $nu + qt + b$ statt y, substituirt, so würde man dahin gelangen, alle Glieder in welche y sich zu einen ungraden Grade erhoben findet, entfernen können, die neue Axe der Abscissen würde ein Durchmesser dessel-

ben

ben Geschlechts seyn, als die der zweyten Ordnung, ein absoluter Durchmesser, dessen sämmtlichen Puncten, eben so viele positive als negative Ordinaten entsprechen würden, und eine jede der Ersten würde eine ihr gleiche unter den Zweyten haben. In Wahrheit, man könnte alsdann t^2, als die unbekannte in der vorgegebenen Gleichung ansehen, und wenn man $t^2 = z$ machte, so würde kommen $t = \pm \sqrt{z}$, oder so viele Paare vom Werthe von t, gleich und von verschiedenen Zeichen als die Gleichung in z Wurzeln haben würde. Es verhält sich nicht so mit den absoluten Durchmessern, wie mit den einfachen, denn die Anzahl Glieder, welche man verschwinden laßen muß um die Curve zu erhalten, bey denen absolute Durchmesser statt finden würden, wird nach und nach immer größer, so wie man zu höheren Ordnungen übergeht, und unter den fünf Größen m, p, n, q, und b, sind wie man weiß, nur vier, mit welchen man nach belieben disponiren kann.

220.

Die Transformation der Coordinaten bietet uns ein elegantes Mittel dar, um die Lage einer graden Linie zu bestimmen, die eine vorgegebene Curve in einem beliebigen Punct berührt, und dadurch uns zu erkennen giebt, ob dieser Punct einfach, oder vielfach ist, und ob die Curve y eine Inflexion erleidet.

In Wahrheit, wenn man begreift, daß der Ursprung der Coordinaten, welcher zuerst in A Fig. 17 und 18 gewesen ist, auf einen beliebigen Punct der Curve MX, versetzt worden ist und man zur Axe der Abscissen die grade Linie MB′ parallel mit AB und zur Axe der Ordinaten eine beliebige grade Linie Mm, welche durch den

Punct

Punct M gehet genommen hat, so ist es sichtbar, daß diese letztere der Curve wenigstens zweymahl begegnet, in M und in m.

Wenn man u und t die neuen Abscissen und die neuen Ordinaten nennt, und wenn man $AP = a$, und $PM = b$ macht, so wird man die Gleichung zwischen u und t, durch die Substitution von $u + pt + a$ statt x und von $qt + b$, statt y, erhalten. Um aber die Puncte in welchen die neue Axe der Coordinaten Mm der Curve begegnet, zu finden, so wird man in dieser Gleichung, $u = o$ machen müssen, und die Werthe von t die daraus hervorgehen, werden die Werthe der verschiedenen Ordinaten seyn, welche dem Ursprung M entsprechen. Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Linie Mm, indem sie sich um den Punct M dreht, sich der Linie MT nähert, welche nur die Curve berührt, so wird sich der Punct m auch immer mehr und mehr dem Puncte M nähern, und diese beyde Puncte werden zusammenfallen, wenn Mm und MT sich decken werden. In diesem Falle werden also zwey Werthe von t seyn, welche zu gleicher Zeit Null werden, und folglich wird die Gleichung von u und t durch t^2 in der Hypothese von $u = o$, getheilt werden können, welches erfordert, daß das durch t multiplicirte Glied, sowol als das beständige Glied verschwindet. Das folgende Beyspiel wird den Gebrauch, welchen man von dieser Bedingung machen kann, zeigen.

Die Gleichung sey $y^2 = Ax$; man wird darin nur setzen $pt + a$ statt x, und $qt + b$ statt y, denn da man nach den Substitutionen $u = o$ machen muß, so ist es unnöthig, auf diese veränderliche Größe zu achten. Ordnet man in Beziehung auf t, so wird man finden

$$q^2 t^2 + (2bq - Ap)t + b^2 - Aa = o.$$

Soll

Soll diese Gleichung durch t^2 getheilt werden können, so müßte man haben

$$b^2 - Aa = 0, \qquad 2bq - Ap = 0.$$

Die Erste von diesen zwey Gleichungen, welche nicht anders als die vorgelegte ist, in welcher man x durch a und b durch y ersetzt haben würde, wird immer identisch seyn, weil, da der Punct M, auf der gegebenen Curve ist, er zwischen a und b dieselbe Relation haben muß, als zwischen x und y.

Die zweyte Gleichung wird geben $\frac{q}{b} = \frac{A}{2b}$. Wenn man sich auf die, in Nr. 210 aufgestellten Conventionen bezieht, so wird man sehen, daß $\frac{q}{p}$, die Tangente des Winkels welchen die Coordinate t mit der Abscisse x macht, ausdrückt, und daß folglich die mit dieser Ordinate parallele Axe in Beziehung auf die primitiven Axen, zur Gleichung haben muß

$$y - b = \frac{q}{p}(x - a) \text{ (Nr. 198)};$$

Wenn man darin den so eben gefundenen Werth von $\frac{q}{p}$, setzt, so geht daraus hervor:

$$y - b = \frac{A}{2b}(x - a)$$

welches die Gleichung der graden Linie TM seyn wird.

Wenn man in dieser letzten Gleichung $y = 0$ macht, so wird kommen

$$x = \frac{2b^2}{A} + a;$$

bemerkt man, daß durch die Natur der vorgelegten Curve

$b^2 =$

$b^2 = Aa$ ist, so wird man $x = - a$ finden. Dieser Werth, der den Punct T entspricht wird geben, Fig. 17,

$$AT = a, \text{ und } PT = AP + AT = 2a;$$

man wird ohne Mühe in diesem Resultate die Subtangente der Parabel deren Gleichung $b^2 = Aa$, ist, wieder erkennen.

221.

Wenn der Punct M Fig. 19, der Durchschnitt mehrerer Zweige der Curve wäre, so würden, wie auch die Lage der Axe Mm beschaffen wäre, eben so viel Werthe von t, (welche Null in der Voraussetzung von $u = o$, werden), als Zweige durch diesen Punct gehen, seyn, die Gleichung in u und in t wäre also durch eine Potenz von t, deren Grad durch die Anzahl dieser Zweige angezeigt ist, theilbar, welchen Werth man auch dem Verhältnisse $\frac{p}{q}$ geben könnte.

Daraus folgt, daß um zu wissen ob der Punct, dessen Coordinaten a und b sind zu verschiedenen Zweigen der vorgelegten Curve gehört oder nicht, man

$$pt + a \text{ und } qt + b$$

statt x und y substituiren muß, und nachher muß man suchen, wie viel Glieder von der transformirten Gleichung verschwinden. Wenn sie durch t^2 theilbar würde, so wäre der Punct, welchen man betrachtet doppelt d. h. daß er zweyen Zweigen angehören würde; er würde dreyfach seyn, oder dreyen Zweigen angehören, wenn diese transformirte Gleichung durch t^3 getheilt werden könnte, u. s. w.

Man kann auch finden, ob die vorgelegte Curve doppelte Puncte, dreyfache, u. s. w. hat, indem man sucht, die so eben abgehandelte transformirte Gleichung durch

t^2,

t^2, durch t^3 . . . theibar zu machen. Wir wollen uns z. B. vornehmen die doppelten Puncte, der, durch die Gleichung

$$x^3 - 3Axy + y^3 + A^3 = 0$$

vorgestellten Curve zu finden.

Wenn man darin x und y in $pt + a$ und $qt + b$ verwandelt, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 3Aab + b^3 + A^3 + [(a^2 - Ab)p + (b^2 - Aa)q]3t \\ \qquad + (ap^2 - Apq + bq^2)3t^2 + (p^3 + q^3)t^3 \end{array}\right\} = 0,$$

ein Resultat, welches durch t^2 theilbar seyn soll, was auch p und q seyn mag, wenn a und b Werthe haben, die sich zu einem doppelten Punct schicken. Um diese Bedingung auszudrücken, so wird man einzeln, das beständige Glied, den Theil des Coefficienten von t der mit p multiplicirt, und den welcher mit q multiplitirt ist, gleich Null setzen, welches die drey folgenden Gleichungen hervorbringen wird,

$$a^3 - 3Aab + b^3 + A^3 = 0, \qquad a^2 - Ab = 0, \qquad b^2 - Aa = 0.$$

Die beyden letzten geben,

$$1)\ a = 0,\ b = 0, \qquad 2)\ a = b = A:$$

Da die Werthe $a=0$, und $b=0$, der ersten Gleichung nicht genug thun, so gehören sie nicht zu der vorgelegten Curve; da aber die Voraussetzung von $a = b = A$, diese Gleichung identisch macht, so muß man daraus schließen, daß der Punct in welchen man $x = y = A$ hat, ein doppelter Punct ist.

222.

Wenn man die Gleichung der graden Linie, welche die Curve an diesem Punct berührt, forderte, so würde man das Verhältniß $\frac{q}{p}$ bestimmen, wenn man den Coefficient von t^2 gleich Null setzte. Ueberhaupt würde man

für einen vielfachen Punct, welcher eine beliebige Zahl der letzten Glieder der in t transformirten Gleichung verschwinden lassen würde, den Coefficienten des ersten der Glieder, welche nicht verschwinden, gleich Null setzen. Folgendes ist der Grund dieser Regel:

Man kann durch den Punct M eine unendliche Zahl solcher Axen als Mm, führen, welche einerley Zweig MX zum wenigsten in zwey Pnncte, begegnen werden; zuerst in M, und alsdann anders wo in m: der zweyte dieser Puncte wird sich immer mehr und mehr dem ersten nähern, nach Maaßgabe als die Axe Mm sich immer mehr und mehr der Tangente TM nähern wird. Wenn diese zwey grade Linien sich decken, so werden die Puncte M und m vereint seyn; es wird also in Beziehung auf der Axe TM ein neuer Werth von t da seyn, welcher Null werden wird; und folglich wird die transformirte Gleichung in Beziehung auf dieser Axe genommen, theilbar seyn, durch eine um eine Einheit höhere Potenz von t als diejenige Potenz ist, die man für jede andere Axe antreffen würde.

Da der Punct welchen man in dem Beispiel, der vorhergehenden Nummer betrachtet hat, doppelt ist, so muß die Tangente angesehen werden, als, wenn sie drey Werthe von t, Null machte, weil es immer ihre zwey giebt, die in Beziehung auf einer beliebigen Axe verschwinden, man muß also das mit t^2 behaftete Glied in der transformirten Gleichung verschwinden lassen, damit sie durch t^3 theilbar wird

Wenn man in dieser Gleichung den Coefficienten von t^2 gleich Null macht, so kömmt

$$ap^2 - Apq + bq^2 = 0;$$

setz

setzt man A, statt a und b, und dividirt durch p, so findet man

$$1 - \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = 0.$$

Man darf sich nicht verwundern zu sehen, daß $\frac{q}{p}$ durch eine Gleichung, welche von einem höheren Grade, als der erste, bestimmt ist, denn ein einziger Blick auf der Figur geworfen, beweiset, daß überhaupt für einen Vielfachenpunct eben so viele Tangenten sind, als verschiedene Zweige darinn durchgehen, und daß daher ein doppelter Punct zwey Zweige haben muß. Jedoch, wenn sich unter den Zweigen, mehrere befänden die sich nur berührten, so würden sie nur eine einzige Tangente haben. daraus entstehen verschiedene Arten von Vielfachenpuncte.

Die Rückkehrpuncte sind Vielfachepuncte, in welchen zwey Zweige sich berühren, und nicht weiter darüber hinaus gehen. In dem der ersten Art, befindet sich die Tangente TM (Fig. 20) zwischen den beyden Zweigen und sie läßt sie beyde auf derselben Seite, in den der zweyten Art, (Fig. 21). Wenn die Zweige anstatt in M anzuhalten, auf der andern Seite, nach den punctirten Wegen fortgesetzt würden, so würde der erste Fall eine Osculation, und der zweyte ein Embrassement seyn.

223.

Die Gleichung

$$1 - \frac{q}{q} + \frac{q^2}{p^2} = 0$$

giebt für $\frac{q}{p}$ nur zwey eingebildete Werthe, welches uns sehen läßt, daß in dem Punct, welchen wir untersuchen,

die vorgelegte Curve mit keiner Tangente versehen ist; und wie klein auch immer ein Theil der Curve seyn mag, so begreift man doch, daß es immer möglich ist eine grade Linie die sie berührt, zu führen, daraus folgt, daß der Punct von welchem die Rede ist, nichts anders als ein isolirter oder conjugirter Punct ist (Nr. 209).

Die Vergleichung von

$$x^3 - 3Axy + y^3 + A^3 = 0,$$

mit der allgemeinen Formel der Gleichungen des dritten Grades

$$y^3 + Py + Q = 0,$$

wird geben

$$P = -3Ax, \quad Q = A^3 + x^3;$$

wenn man für P und Q, ihre Werthe in den Ausdrücken der Wurzeln von

$$y^3 + Py + Q = 0,$$

setzt, so wird man finden, daß die Wurzeln von

$$x^3 - 3Axy + y^3 + A^3 = 0,$$

sind

$$y = -x - A,$$

$$y = \frac{x+A}{2} + \left(\frac{x-A}{2}\right)\sqrt{-3},$$

$$y = -\frac{x+A}{2} - \left(\frac{x-A}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

Die erste stellt eine grade Linie DY vor, (Fig. 22) für welche

$$AE = AD = -A;$$

da die zweyte und die dritte nur dann reell werden, wenn $x = A$ beyde zum Punct M gehören, welcher, wie man sieht, wohl ein Doppeltpunct ist, aber keine Tangente haben haben.

224.

Wenn man die doppeltpuncte der, durch die Gleichung

$$x^3 - 3Axy + y^3 = 0,$$

vorgestellten Curve suchen wollte, so würde die Regel aus Nr. 221 $a = 0$, geben; welches anzeiget; daß der Ursprung der primitiven Coordinaten, in der That ein doppeltpunct ist.

Wenn man den Coefficienten von t^3 gleich Null setzt, um die Tangenten dieses Punctes zu bestimmen, so wird man $Apq = 0$ finden, eine Gleichung, welche man befriediget, wenn man $p = 0$, oder $q = 0$ macht.

Im ersten Falle, wird das Verhältniß $\frac{q}{p}$ unendlich, und im zweyten Fall Null: daraus folgt (Nr. 196) daß eine der Tangenten mit der Abscissenaxe einen rechten Winkel bildet, und daß die andere ihr parallel ist. Aber da sie durch den Ursprung gehen, so sieht man, daß die erste nichts anders als die Ordinatenaxe und die andere nichts anders als die Abscissenaxe ist. Die Figur 8 stellt die Curve, welche aus der vorgelegte Gleichung entstehet vor; der Punct A ist der Durchschnitt der beyden Zweige, von welchen der eine von AC und der andere von AB berührt ist.

225.

Wenn die vorgelegte Curve eine Inflexion erleidet, so werden alsdann 3 Durchschnitte der Axe Mm, (Fig. 23) seyn; welche sich auf einen einzigen reduciren werden, wenn er sich mit der Tangente deckt. Daraus folgt, daß im Fall einer Inflexion die in t transformirte Gleichung

durch t^3 theilbar seyn muß, wie für einen dreyfachenpunct, aber mit dem Unterschiede, daß, wenn wirklich 3 Zweige der Curve durch den Punct M gehen, die mit t und t^2 behafteten Glieder für alle mögliche Werthe von $\frac{q}{p}$ verschwinden würden, während daß nur dann, wenn wir diesem Verhältnisse, den der Tangente zukommende Werth geben, die so eben genannten Glieder verschwinden.

Wir werden als Beyspiel, die, durch die Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + B^2y = 0$$

vorgestellten Curve nehmen. Wenn man macht

$$a = pt + a, \quad y = qt + b,$$

so kömmt

$$a^3 + Aa^2 + B^2b + [(3a^2 + 2Aa)p + B^2q]t$$
$$+ (3ap^2 + Ap^2)t^2 + p^3t^3 = 0.$$

Wenn die vorgelegte Curve einen Inflexionspunct hat, so wird nachdem was vorhergehet die oben transformirte Gleichung durch t^3 theilbar, wenn man $\frac{q}{p}$ dem diesem Puncte zukommenden Werth giebt; die 3 Gleichungen

$$a^3+Aa^2+B^2b=0, \quad (3a^2+2Aa)p+B^2q=0, \quad 3ap^2+Ap^2=0,$$

werden also zu gleicher Zeit statt haben. Die letzte giebt $a = -\frac{A}{3}$, wenn man in der ersten und zweyten diesen Werth setzt, so wird man finden

$$b = -\frac{2A^3}{27B^2} \text{ und } \frac{q}{p} = \frac{A^2}{3B^2}.$$

Diese Werthe gehören nicht zu einem Vielfachenpunt, weil sie nicht einzeln einen jeden Coefficienten von p und q aber wohl in einen Inflexionspunct, verschwinden lassen.

Es wären aus den von der Transformation der Coordinaten so eben gemachten Anwendungen viele interessante

ressante Folgerungen zu ziehen, da ich aber dieselben Gegenständen durch die Differentialrechnung abhandeln muß, so werde ich mich mit den folgenden Bemerkungen begnügen.

226.

Wenn ein Werth von $\frac{q}{p}$ die transformirte Gleichung durch t^n theilbar macht, und wenn der Punct wo dieses geschiehet nicht vielfach ist, so würde nur da eine Inflexion statt haben, wo n eine ungrade Zahl wäre. Um sich diesen Fall zu zeichnen muß man sich eine Curve XY (Fig 14) vorstellen die eine beliebige Anzahl Inflexionen hat, z. B. drey; man sieht, daß eine ähnliche Curve durch eine gerade Linie in fünf Pnncte geschnitten werden könnte, und daß die Entfernungen der Durchschnitte, nicht nur allein von der Lage dieser geraden Linien abhängen werden, sondern auch noch von den Zwischenräumen, welche eine jede Inflexion absondern, Zwischenräume die selbst von den Werthen der beständigen Größen der Gleichung der vorgelegten Curve, abhängen.

Es ist evident, daß wenn die beyden Inflexionen M und M', für einige besondere Werthe dieser beständigen Größen, sich vereinigten, sie sich unter einander vertilgen würden, dergestalt, daß, wenn die Curve in ihren primitiven Zustand nur diese beyden hätte, sie von ihnen keine Spur mehr zeigen würde. Aber wenn sie z. B. deren noch eine dritte in M'' hat, so würde sie solche noch behalten, wenn auch selbst der Punct M'' mit den beyden andern vereint angenommenen Puncten M und M', zusammenfiele. Die Puncte die so aus der Vereinigung mehreren Inflexionen entstehen, werden Schlangenpuncte genannt

sie sind entweder sichtbar oder unsichtbar, je nachdem die Zahl der Inflexionen ungerade oder gerade ist.

227.

Eine Curve von einer beliebigen Ordnung kann keinen Singulärenpunct haben welcher die Vereinigung einer Anzahl einfacher Puncte, größer als der Exponent ihrer Ordnung wäre. Und in Wahrheit, weil die Transformation der Coordinaten einer Curve, nicht den Grad ihrer Gleichung verändert, so folgt daraus, daß die neuen Ordinaten, welche Lage man ihnen auch geben mag für dieselbe Abscisse nicht mehr Werthe haben können, als es Einheiten in der Zahl welche den Grad dieser Gleichung anzeiget, giebt. Aus diesem Grunde zeigt eine Curve der zweyten Ordnung, die höchstens nur zwey Ordinaten hat, für einerley Abscisse, keinen doppelten Punct; denn wenn man den Ursprung in einem Punct von dieser Natur nimmt, und wenn man die Tangente für die Ordinatenaxe nimmt, so sollte daraus die Vereinigung der drey unterschiedenen Puncte, folgen. Die Curve der dritten Ordnung lassen Doppelt- und Inflexionspuncte zu, weil sie drey Ordinaten auf einerley Abscisse haben können.

228.

Es ist leicht diese Betrachtungen so weit als man immer will, auszudehnen, sie beruhen auf den Grundsatz, daß die Zahl der Durchschnitte einer graden, und einer jeden krummen Linie, nicht die Zahl welche den Grad der Gleichung der Curve anzeiget, übertreffen kann. In der That, müssen die Ordinate des Begegnungspuncts von zwey beliebigen Linien, zu gleicher Zeit, der Gleichung der einen und der der andern genug thun, und wenn man daher

her eine der unbestimmten Größen aus diesen zwey Gleichungen eliminirt, so wird das Resultat alle Werthe, welche die zweyte unbestimmte Größe in den verschiedenen Durchschnittspuncten der Linien, welche man betrachtet, annehmen kann, geben; da die Gleichung einer graden Linie $y = ax + b$ ist (Nr. 196), so wird das Resultat ihrer Combination mit der Gleichung vom Grade m, sich niemals über diesen Grad hinaus erheben können.

Aus dem so eben Gelesenen, und aus dem in Nr. 189. bewiesenen Satz folgt, daß zwey Curven eine von der Ordnung m, und eine von der Ordnung n, sich in nicht mehr als in mn Puncte schneiden können; aber es wird oft geschehen, daß die Zahl der Durchschnitte nicht diese Gränze erreichen wird und in diesem Falle werden x und y imaginaire Werthe haben.

Das Vorhergehende ist die Grundlage von der Theorie der Construktion der Gleichungen, in welcher man eine Gleichung von einer einzigen unbestimmten Größe, als das Resultat der Eliminirung einer andern unbestimmten Größe zwischen zwey Gleichungen, ansieht, welche zu gleicher Zeit die erstern enthielten, oder was eben dasselbe ist, man betrachtet die unbekannte Größe als die Abscisse, eines, zugleich auf zwey gegebene krumme Linien, gelegenen Puncts,

229.

Da die Gleichung der ersten Ordnung nur drey Glieder und zwey beständige Coefficienten hat, so sind zwey Puncte hinreichend gewesen, sie zu particularisiren (Nr. 197); so werden nur fünfe nöthig sind, dasselbe in Ansehung der Gleichung der zweyten Ordnung zu machen, obgleich sie aus 6 Glieder bestehet. (Nr. 212). in der

Erwartung, daß man immer durch die Division, den Coefficienten von irgend einem ihrer Glieder, zur Einheit machen kann.

Wenn man durch $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha''''$ die Abscissen der fünf bekannten Puncte bezeichnet, und ihre Ordinaten durch $\beta, \beta', \beta'', \beta''', \beta''''$, und man die allgemeine Gleichung von Nr. 212. mit A dividiret, oder man mehrerer Einfachheit wegen, diesen Coefficienten der Einheit gleich macht, indem man statt x und y einen jeden von ihren gegebenen Werthen setzt, so wird man die fünf folgende Gleichungen haben

$$1 + 2B\alpha + 2C\beta + D\alpha^2 + 2E\alpha\beta + F\beta^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha' + 2C\beta' + D\alpha'^2 + 2E\alpha'\beta' + F\beta'^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha'' + 2C\beta'' + D\alpha''^2 + 2E\alpha''\beta'' + F\beta''^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha''' + 2C\beta''' + D\alpha'''^2 + 2E\alpha'''\beta''' + F\beta'''^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha'''' + 2C\beta'''' + D\alpha''''^2 + 2E\alpha''''\beta'''' + F\beta''''^2 = 0$$

welche dazu dienen werden die Coefficienten B, C, D, E und F zu bestimmen. Da jeder dieser Coefficienten nur einen Werth hat, so ist es offenbar, daß durch 5 gegebene Puncte nur eine Linie der zweyten Ordnung durchgehen kann.

Wenn die allgemeine Gleichung der dritten Ordnung (Nr. 216), obgleich sie aus zehn Gliedern bestehet, nur 9 nothwendige Coefficienten enthält, so wird man eben so sehen, daß 9 Puncte hinreichend sind die Curve, welche sie vorstellt zu particularisiren; und wenn man diese Bemerkungen verallgemeinert, so wird man ohne Mühe daraus schließen, daß die allgemeine Gleichung der Linien der Ordnung m haben wird $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Glieder, $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ nöthige Coefficienten, und daß

man

man daher $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ gegebene Puncte haben muß, um die Curve zu welcher sie gehört zu particularisiren. *)

230.

Anwendung der Entwickelung der Functionen in Reihen auf die Theorie der Curven.

Die Entwickelung der Functionen in Reihen ist das fruchtbarste analytische Mittel, um aus der Gleichung einer

*) Es ist nöthig zu bemerken, daß die Bestimmung der Linie, welche durch die gegebenen Puncte gehen soll, nicht vollständig seyn; oder selbst statt haben kann, so lange als die Lage dieser Puncte nicht so beschaffen ist, daß mehrere der Gleichungen durch welche man die Coefficienten finden soll, in einander übergehen oder wiedersprechend werden. Dieses ist die Einschränkung durch welche Euler, eine Schwierigkeit welche diese Theorie darbot, gehoben hat, und von welcher hier ein Beyspiel folgt

Nach dem oben Gesagten, kann nur eine Linie der vierten Ordnung durch 14 gegebene Puncte gehen, und dennoch folget aus dem Satze, womit Nr. 228 endiget, daß zwey Curven dieser Ordnung sich in 16 Puncte schneiden können; es würde also scheinen, als wenn 16 Puncte nicht einMahl hinreichend wären, um die Curve der vierten Ordnung zu particularisiren, weil sie zwey Curven dieser Ordnungen gemeinschaftlich seyn können; aber das Paradoxon erklärt sich, wenn man bemerkt, daß wenn man gleich, um die 14 Coefficienten der allgemeinen Gleichung der vierten Ordnung, in Beziehung auf diese Puncte zu bestimmen, man 16 Gleichungen des ersten Grades hätte, doch daraus entstehen würde, daß mehrere von diesen Gleichungen eine in die andere übergehen, und daß willkührliche Coefficienten übrig blieben.

ner Curve alle Umstände ihres Laufs abzuleiten. Wenn man bey der Gleichung irgend einer Curve, die in den 119ten und folgenden Nr. vorgetragenen Methode, anwendet, so gelangt man dahin, daß wenn die Abscisse sehr klein oder sehr groß ist, die Ordinate durch convergirende Reihen auszudrücken, welche in einem und im andern Falle die Lage der Zweige, welche sie vorstellen, kennen lehren, indem sie uns das Mittil darbieten diese Zweige mit sehr einfache Curven zu vergleichen, und deren Lauf sehr leicht zu bestimmen ist

Den Gebrauch welchen wir von dieser Methode in Betracht der Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$$

machen werden, wird sie besser als eine allgemeine Darstellung kennen lehren.

Wir haben aus der hier oben angezeigten Gleichung (Nr. 124) die vier Reihen gezogen

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81 a^3} + \frac{x^5}{243 a^4} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

$$y = -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12} \ldots \quad (2)$$

$$y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

$$y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

Die Reihe (1) ist um so viel mehr convergirend als x kleiner ist, und man kann diese veränderliche Größe so annehmen, daß das erste Glied x, die Summe aller ihm folgenden Glieder übertrift (Einl, Nr. 9 und 36); dergestallt, daß der Werth von y, so wenig als man nur will, von dem Werthe welchen die Gleichung $y = x$ geben würde, unterschieden seyn wird, welche Gleichung einer graden Linie die durch den Ursprung der Coordinaten geführt ist, angehört, und mit der Axe der Abscissen einen

Winkel

Winkel von 45° macht. Daraus folgt, daß ein sehr kleiner Theil von der vorgelegten Curve gegen den Punct A (Fig. 25) genommen, merklich mit der so eben abgehandelten graden Linie AY zusammenfallen wird, und dieses um so viel besser, je weniger sie ausgedehnt seyn wird. Man wird außerdem sehen, daß es unmöglich ist, durch den Punct A eine grade Linie zu ziehen die zwischen die grade Linie AY und den Zweig der Curve AX durchgehet.

231.

Um die Ordinate der graden Linie AY, von die der Curve in Beziehung auf derselben Abscisse; zu unterscheiden, so wollen wir die erste mit einem Strich bezeichnen; wir werden haben

$$PM' = y' = x,$$

und folglich

$$MM' = y - y' = \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen jetzt die grade Linie AY mit einer andern beliebigen graden Linie AZ vergleichen, welche durch die Gleichung $y'' = Ax$ vorgestellt ist; der Unterschied der Ordinaten PM'' und PM', welche zu einerley Abscisse in der einen sowohl als in der andern correspondiren, wird

$$M'''M' = y'' - y' = (A - 1)x$$

seyn; aber man kann x so klein nehmen, daß die Summe der Glieder

$$\frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3}$$

kleiner ist als $(A - 1)x$; wenn man also voraussetzt, daß AP den Werth vorstellt der diese Bedingung erfüllt, so wird man alsdann haben $MM' < M'M''$.

Man

Man wird auf ähnliche Art, x einen negativen Werth Ap geben können, so daß man noch hätte $mm' < m'm''$; folglich, welche Hypothese man auch über die Zeichen der Größe A — 1 macht, so wird doch niemahls in dem Raume $M''m''$ die grade Linie AZ sich zwischen die Curve AX, und die grade Linie AY finden.

Es ist leicht zu sehen, daß man als Kennzeichen der Tangente die Unmöglichkeit, eine andre grade Linie zwischen ihr und einer Curve durchgehen zu lassen nehmen darf. Die Linie AY berührt also die vorgelegte Curve in dem Punct A.

232.

Das Zeichen der Differenz

$$y - y' = \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81\,a^3} \text{ u. s. w.}$$

läßt uns sehen, von welcher Seite der graden Linie AY, sich die vorgelegte Curve vor und nach den Berührungspunct sich befindet, dieses Zeichen welches nur von dem Zeichen des ersten Gliedes abhängt, welches da es beständig positiv ist, uns sehen läßt, daß die Ordinate, größer als die der graden Linie, wenn x positiv ist, und folglich ist die Curve über die Tangente, es sey disseits oder jenseits des Puncts A.

Aber die bloße Ansicht einer Curve und ihrer Tangente beweiset, daß, bey dem Berührungspunct, die erste immer ihre Convexität der andern zeigen soll; also ist der Punct A, kein Inflexionspunct, denn sollte dieses seyn, so müßte vor oder nachher die Curve auf der andern Seite der Tangente gehen.

Wir wollen jetzt die Reihe (1) betrachten, welche nur convergent ist, wenn x in Beziehung auf a sehr groß ist.

Je

Je größer x wird, desto mehr nähert sich der durch diese Reihe gegebene Werth von y der Größe a, man mag x positiv oder negativ nehmen aber ohne solche jemahls zu erreichen.

Wenn man auf der Axe AC, unter AB die Entfernung AD = − a nimmt, und wenn man die grade Linie DU mit AB parallel ziehet, und (y gleich − a, in der ganzen Länge dieser graden Linie ist), so werden die durch die Reihe (2) vorgestellten Zweige, diese Linie nie durchschneiden können, soweit verlängert man sie auch annehmen mag; sie werden sich aber ihr immer mehr und mehr nähern und sie folglich zur Asymtote haben.

Da das zweyte Glied der Reihe (2) positiv ist, wenn x negativ ist, und negativ, wenn x positiv ist, so wird man hieraus wie in der vorhergehenden Nr. schließen, daß die Asymtote unter die Curve auf die Seite der negativen x, und über die Seite der positiven x, ist; man wird überdem noch sehen, daß die Ordinate y in den einen und dem andern Falle negativ ist: die Zweige FS und Ax werden also in Betracht ihrer Asymtote die durch die Figur vorgestellten Lage haben.

Man hat nur ihre Gränzen vollständig gezeichnet, weil dieses die einzigen Theile sind, welche die Reihe (2) vorstellen könnte, die man nur so lange als sie convergirend ist, anwenden muß.

233.

Wir wollen jetzt zu den Reihen (3) und (4) übergehen. Sie geben für y, Werthe, welche um so viel weniger von denjenigen die aus den Gleichungen

$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad y = - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}},$$

hervor-

hervorgehen unterschieden sind, als x größer ist; die Curven welche diese letztere vorstellen, nähern sich also immer mehr und mehr der Zweige zu welchen die Reihen (3) und (4) gehören.

Die zwey Gleichungen

$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}a, \text{ und } y = - a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a$$

sind die Wurzeln von

$$(y - \tfrac{1}{2}a)^2 = \frac{x^3}{a}$$

und bringen eine von zwey ähnliche Zweige ER und ET zusammengesetzte Curve hervor, von welchen der erste den aus der Reihe (3) hervorgegangenen positiven Zweig AX als Asymtote dient, und der zweyte erfüllt denselben Gegenstand in Betracht des durch die Reihe (4) gegebenen negativen Zweig FV man wird bemerken, daß die Reihen (3) und (4) imaginair werden, wenn man x negativ annimmt *(

234.

*) Man kann leicht durch Puncte, die Curve welche die Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$$

vorstellt, construiren; denn wenn man $y = tx$ macht, so wird diese Gleichung durch x^3 theilbar werden, und reducirt sich auf $a + xt - at^3 = 0$, woraus man zieht

$$x = \frac{at^3 - a}{t};$$

giebt man alsdann t willkührliche Werthe, so wird man x und y haben, ohne daß es nöthig ist, irgend eine Wurzel auszuziehen. Aehnliche Kunstgriffe leiten uns oft dahin die unbestimmten Größen einer Gleichung auf eine einfache Art auszudrücken, und die uns erlaubt daraus so viel rationale Werthe zu finden als man will. Man sieht daraus, daß die Auflösung der Fragen, der unbestimmten Analysis zur Construction der Curven nutzlich seyn kann.

234.

Die Betrachtung der verschiedenen fallenden Reihen welche man aus einer Gleichung von zwey veränderlichen Größen ziehen kann, lehrt uns, wie viel unendliche Zweige die Curve hat, die sie vorstellt, und welches die Natur der Linie ist, gegen welche diese Zweige concuriren. Es ist evident, daß eine Curve nur in den beyden folgenden Fällen, unendliche Zweige haben kann.

1) Wenn x unendlich ist, so hat y einen reellen Werth es sey endlich oder unendlich; 2) wenn y unendlich wird, obgleich x endlich bleibt.

In dem ersten Fall sucht man alle die Reihen, welche den Werth von y in der Hypothese daß x sehr groß sey, auszudrücken (Nr. 121). Diese Reihen werden nur von der folgenden Gestalt seyn konnen

$$y = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'} + \ldots \text{(I)}$$

in welcher die Zahl der mit den positiven Potenzen von x behafteten Glieder immer begränzt seyn wird. Macht man

$$\ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} = y',$$

so wird man haben

$$y - y' = B'x^{-\beta'} + Cx^{-\gamma'} + \text{u. s. w.}$$

woraus man sieht, daß, je größer x seyn wird, je weniger wird y' von y unterschieden seyn; und da man x immer dergestalt nehmen kann, daß $y - y'$ weniger sey als eine gegebene Größe, so wird folglich der durch die Reihe (I) vorgestellte Zweig, sich unaufhörlich dem einen der Zweige, der, durch die Gleichung

$$y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha},$$

gegebenen Linie, nähern.

Auf die Natur dieser Linie beruhet die Unterscheidung der unendlichen Zweige in hyperbolische und parabolische Zweige.

Die ersten sind die, welche so wie die Zweige der gemeinen Hyperbel, eine grade Linie zur Asymtote haben; sie entsprechen den Fall wo

$$y' = Bx + A.$$

Wenn $B = 0$ ist, so ist die Asymtote mit der Abscissenaxe parallel, wie man es in den Beyspiel der vorhergehenden Nr. gesehen hat, und sie fällt mit dieser Axe zusammen, wenn B und A Null sind.

Die Gleichung

$$y' = Cx^2 + Bx + A,$$

die einfachste nach

$$y = Bx + A,$$

gehört der Parabel, und da sie in der allgemeinen Gleichung

$$y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha}$$

enthalten ist, so nennt man parabolisch, diejenigen Curven, welche diese letzte Gleichung vorstellt, und die Zweige von welchen sie in einer beliebigen Curve die Asymtoten sind, heißen parabolische Zweige.

Die zwey durch die Reihen (3) und (4) der vorhergehenden Nr. gegebenen Zweige AX und FV, sind parabolisch, weil ihre Asymtote die zur Gleichung

$$y' = \tfrac{1}{2} a \pm a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

hat, eine parabolische Curve ist.

Man wird die unendlichen Zweige, in welchen y allein unendlich wird, finden, wenn man die Reihen sucht, die den Werth von x, für y sehr groß, ausdrücken.

235.

Wenn man in der Reihe (I) successive

$y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha}$,

$y'' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'}$,

$y''' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'}$

u. s. w. macht, so werden die Größen y', y'', y''', sich immer mehr und mehr den Werth von y nähern; und folglich werden auch die Curven deren Ordinaten sie ausdrücken, sich unaufhörlich dem unendlichen Zweige nähern zu welchem die Reihe (I) gehört. Diese Curven werden in unendlicher Anzahl seyn, wenn die Reihe (I) unendlich ist; und in diesem Falle wird der Zweig, welchen sie vorstellt, eine unendliche Anzahl krumme asymptoten haben. Jedoch gehört eigentlich diese Benennung der Curve deren Ordinate y' ist, weil sie einzig, und sie selbst die Asymptote von allen andern ist.

Wenn der Zweig welchen man betrachtet, hyperbolisch ist, oder, wenn man hat

$$y' = Bx + A,$$

so ist die erste krumme Asymptote durch die Gleichung

$$y'' = Bx + A + B'x^{-\beta'}$$

gegeben, die man auf eine sehr einfache Form bringen kann, indem man die Lage der Abscissen verändert. Wenn man darinnen mu statt x, $nu + t + b$ statt y'' setzt (Nr. 210), und wenn man

$$n = Bm, \quad b = A$$

macht, so wird sie

$$t = B'm^{-\beta'}u^{-\beta'}$$

werden, und weil die Coordinaten x und y untereinander senk-

senkrecht sind, so wird man haben $m^2 + n^2 = 1$ woraus

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2}} \text{ und } n = \frac{B}{\sqrt{1 + B^2}}.$$

Man muß bemerken, daß die Gleichung

$$t' = B'm^{-\beta'} u^{-\beta'}$$

als besonderer Fall die Gleichung $t = Pu^{-1}$ mitbegreift, welche der gemeinen Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen, gehört, und daß die Curven, welche sie vorstellt, auch zu Asymptoten die Axe der t's und die der u's haben, weil t Null wird, wenn u unendlich ist, und umgekehrt. Diese Curven sind unter den Nahmen Hyperbolen von höheren Graden bekannt.

Wenn man die vorhergehende Transformation bey der Reihe (I) ausführt, so wird man finden

$$t = B'm^{-\beta'} n^{-\beta'} + C'm^{-\gamma'} u^{-\gamma'} + \text{u. s. w.}$$

den Zweig welchen sie vorstellt, wird zur graden Asymptote, die Axe der t's und zur krummen Asymptote die durch die Gleichung

$$t = B'm^{-\beta} u^{-\beta}$$

gegebene Hyperbel haben.

236.

Es ist hinreichend das erste Glied der Reihe (I) zu kennen um zu beurtheilen, ob der Zweig, zu welchen er gehört hyperbolisch oder parabolisch ist. Der zweyte Fall wird allemahl statt haben, wenn dieses Glied von der Form Cx^γ seyn wird, wo γ eine beliebige Zahl, aber positiv, und von der Einheit verschieden ist. Jedoch wird die Existenz des Zweiges nicht eher gewiß seyn, als bis man nicht mehr zu fürchten hat, daß irgend eins von

den

den Gliedern der Reihe imaginair wird (Nr. 125), man kann aber nicht eher dafür stehen, als bis man zu Gliedern gelangt ist, deren Successionsgesetz evident ist.

Die Zahl und die Natur der unendlichen Zweige machen die schicklichsten Kennzeichen aus, um die Curven von einerley Ordnung untereinander zu unterscheiden. Euler und Cramer haben sich deren bedient, um die Curven der dritten und vierten Ordnung in große Familien einzutheilen, welchen sie den Nahmen Geschlechter (genres) gegeben haben, und welche sie wieder durch die Betrachtung der singulären Puncte, in Arten eingetheilt haben; aber diese Details mehr curieus als nützlich, sind ganz gegen den Plan welchen ich mir vorgesetzt habe.

237.

Es ist evident, daß man immer die Coordinaten in einer solchen Lage bringen kann, daß die eine und die andere für eine jede der unendlichen Zweigen zu gleicher Zeit unendlich sey, weil es dazu hinreichend seyn wird, die Axen in Beziehung auf den graden Asymptoten der hyperbolischen Zweigen schief zu legen. Diese Zweige sind die einzigen für welche eine der Coordinaten öfters einen endlichen Werth haben kann. Dieses vorausgesetzt, so könnte, wenn r die Ordnung der Curve, welche man betrachtet, bezeichnet, irgend eine der neuen Coordinaten nicht mehr als r Werthe haben, deren jeder nicht mehr als zwey Zweige wird geben können, einer den positiven Werthen der zweyten Coordinate, und der andere, ihren negativen Werthen correspondirend; wenn man also die Ausdrücke der ersten Coordinate alle reell voraussetzt, so werden höchstens nur $2r$ unendliche Zweige herauskommen, d. h. so wie wir es in Nr. 206 angezeigt haben,

eine doppelte Zahl des Exponenten von der Ordnung der vorgelegten Curve.

Es ist leicht nach dem was vorhergehet zu sehen, daß jede Gleichung in welcher die höchste Potenz von irgend einer der unbestimmten Größen, ungerade ist, wenigstens zwey unendliche Zweige geben muß, weil diese unbestimmte Größe in allen Fällen zum wenigsten einen reellen Werth haben wird; und man wird daraus schließen, daß alle Curven einer ungeraden Ordnung nothwendig unendliche Zweige haben.

238.

Gebrauch der Differentialrechnung um die Tangente der Curven, ihre Inflexions- und ihre Rückkerpuncte zu finden.

Die Betrachtungen, vermittelst welche wir die Tangente, von dem am Ursprunge der Coordinaten gelegenen Punct bey der Curve welche die Gleichung
$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$ (Nr. 230) vorstellt bestimmt haben, können bey einem beliebigen Punct einer jeden Curve angewendet werden, wenn man den Ursprung der Coordinaten dahin versetzt.

x' und y' mögen die Coordinaten des Puncts seyn, welchen man betrachten will; wenn man $x' + h$ statt x und $y' + k$ statt y in der vorgelegten Gleichung setzt, so wird man den Ausdruck von k in einer steigenden Reihe nach den Potenzen von h bekommen, es sey nach der Methode aus Nr. 119 u. f. oder durch das Taylorische Theorem: letzteres wird geben

$$k = \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \text{(Nr. 12)}$$

eine

eine Reihe die um so convergirender ist, je kleiner die Größe h ist. Wenn man um abzukürzen sie durch

$$k = ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

vorstellt, und man h und k als neue Coordinaten MQ und QN (Fig 18) ansieht, deren Ursprung im Puncte M ist, so wird man wie in Nr. 231 darthun, daß die gerade Linie MT, da sie $k' = ph$ zur Gleichung hat, die vorgegebene Curve im Punct M berührt, d. h. keine einzige durch diesen Punct gezogene gerade Linie, kann unmittelbar vor und nach der Berührung, zwischen ihr und der Curve durchgehen. Man wird in Wahrheit haben

$$NN' = QN' - QN' = k - k' = qh^2 + rh^3 + \ldots$$

und indem man durch $k'' = Ah$ die Gleichung einer andern geraden Linie MZ bezeichnet, so wird man finden

$$N'N'' = QN' - QN'' = k' - k'' = (p - A)h.$$

So lange nun keiner der Coefficienten p, q, r, . . . nicht unendlich wird, kann man h immer es sey positiv oder negativ so klein annehmen, daß die Summe von allen Gliedern

$$qh^2 + rh^3 + \ldots$$

kleiner als die Größe $(p - A)h$ sey; in dieser Hypcthese wird NN' kleiner als N'N'' seyn, und nn' kleiner als n'n'': die gerade Linie MZ könnte also nicht, was auch A sey, in dem Raume N''n'' zwischen der Curve MX und der geraden Linie MT durchgehen.

Um die Gleichung der geraden Linie MT auf den primitiven Axen AB und AC zu beziehen, muß man $x-x'$, anstatt h, und $y-y'$ anstatt k' setzen; solchergestallt wird man haben

$$y - y' = p(x - x') \text{ oder } y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

 indem

indem man p durch den Differentialcoefficienten den p vorstellt, ersetzt. *)

239.

Wir haben angenommen, daß der Coefficient q des zweyten Gliedes der Reihe

$$k = ph + qh^2 + \ldots$$

positiv wäre; aus dieser Hypothese gehet hervor, daß die Größe

$$k - k' = qh^2 + rh^3 + \ldots$$

positiv bleiben wird, was für ein Zeichen man auch h geben wird, so lange man nur diese Größe klein genug nimmt, damit das Glied qh^2 die Summe aller ihm folgenden Glieder übertrifft; die vorgegebene Curve wird sich also unmittelbar vor und nach dem Punct M über die Tangente befinden, und wird folglich ihre Convexität der Axe AC zu kehren. Das Gegentheil würde statt finden, wenn q negativ wäre; denn da die Differenz $k - k'$ negativ

*) In allem was folgen wird, muß man sorgfältig die Coordinaten x' und y' von den Coordinaten x und y unterscheiden, ob sie gleich auf einerley Axen bezogen sind. Die erstern gehören ausschließlich zu den verschiedenen Puncten der vorgegebenen Curve, und die zweyten können zu einem beliebigen Punct in der Ebene der Figur gehören: unter sich durch die Gleichung

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} \cdot (x - x')$$

verbunden, gehören diese letztern zu allen Puncten der geraden Linie MT, die in dem Puncte der Curve MX dessen Coordinaten

$$AP = x' \text{ und } PM = y'$$

sind, eine Tangente ist.

gativ ist, so würde sich die Curve in diesem Falle unter ihre Tangente befinden (Fig. 17) und würde ihre Concavität der Axe AB zu kehren. Man kann also durch das Zeichen von q oder durch das Zeichen des Differentialcoefficient $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ beurtheilen, wie, in irgend einem Puncte, in Beziehung auf der Abscissenlinie die Concavität einer Curve von welcher man die Gleichung hat, gedrehet ist.

Es ist hier der Ort zu bemerken, daß der Differentialcalcul in allen diese Untersuchungen nur als ein bloßes analytisches Verfahren hineinkömmt, welches freylich auf eine nicht so bequeme Art, jede andere Methode die die Entwickelung von k geben kann, ersetzt werden könnte. Arbogast stellte die Anwendung des Differentialcalculs auf die Theorie der Curven zuerst unter diesem Gesichtspuncte auf, und Lagrange würde auch, durch seine Art diesen Calcul zu betrachten, dahin geführt (Nr. 8).

240.

Die einfachste Art die Tangente für einen gegebenen Punct in der Curve zu construiren, ist diese, von der Curve einem zweyten Punct zu suchen. Man wählt gewöhnlich den Punct T, wo sie die Abscissenaxe begegnet. Es ist evident, daß, um AT zu finden, man in der Gleichung

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

$y = 0$ machen muß, und man wird daraus ziehen

$$AT = x = x' - y'\frac{dx'}{dy'},$$

indem man beobachtet, daß, wenn y eine Function von x'

und umgekehrt, $\frac{dx'}{dy'}$ das Umgekehrte von $\frac{dy'}{dx'}$ (Nr. 55) ist. Wenn man AT von AP wegnimmt, so wird daraus der Ausdruck von der Subtangente PT hervorgehen, man wird also

$$PT = y' \frac{dx'}{dy'}$$

haben.

241.

Hier folgen jetzt einige Anwendungen der oben gefundenen Formeln.

1. Die Gleichung der Parabel sey $y'^2 = Ax$, man wird daraus ziehen

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A}{2y'}$$

und die Gleichung der Tangente wird

$$y - y' = \frac{A}{2y'}(x - x')$$

werden. Bringt man alles auf einerley Nenner und setzt für y^2 ihren Werth Ax', so wird man

$$2yy' = A(x + x')$$

finden. Macht man $y = 0$, so wird man

$$x = AT = - x'$$

haben, und folglich $PT = 2x'$, ein, den von (Nr. 220) gleichstimmendes Resultat; man kann auch unmittelbar AT und PT berechnen, wenn man in ihren Ausdrücken den Werth von $\frac{dy'}{dx'}$ und den von y' setzt.

2. Für den Kreis dessen Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

wäre, würde man

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'}{y'}, \quad y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

oder

$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2,$$

oder endlich

$$yy' + xx' = a^2$$

haben; nachher wird man finden

$$AT = \frac{a^2}{x'}, \quad PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'^2}.$$

3. Die Gleichung

$$y'^2 = Ax'^2 + 2Bx',$$

welche alle Curven der zweyten Ordnung vorstellt, giebt

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Ax' + B}{y'},$$

und folglich wird die Subtangente

$$PT = \frac{y'^2}{Ax' + B};$$

wenn man statt y'^2 ihren Werth setzt, wird man

$$PT = \frac{Ax'^2 + 2Bx'}{Ax' + B}$$

haben.

4. Endlich ziehet man aus der Gleichung

$$x'^3 - 3ax'y' + y'^3 = 0, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{ay' - x'^2}{y'^2 - ax'};$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$yy'^2 - ax'y - y'^3 + ax'y' = axy' - xx'^2 - ax'y' + x'^3,$$

und wenn man für y'^3 ihren Werth setzt, so wird man, indem man reducirt, haben

$$y(y'^2 - ax') + x(x'^2 - ay') = ax'y',$$

man wird auch

$$PT = \frac{y'^3 - ax'y'}{ay' - x'^2} = \frac{2ax'y' - x'^3}{ay' - x'^2} \text{ finden.}$$

242.

Wenn man sich vorsetzte, durch einen außerhalb einer Curve gegebenen Punct dessen Abscisse α und die Ordinate β wären eine Tangente an dieser Curve zu ziehen, so ist es evident, daß man α statt x und β statt y in der Gleichung der Tangente setzen müßte, die Gleichung würde alsdann

$$\beta - y' = \frac{dy'}{dx'}(a - x')$$

werden, und würde in Verbindung mit der Gleichung der vorgelegten Curve dienen, die Coordinaten x' und y' des Berührungspunctes zu bestimmen.

Wir wollen zum ersten Beyspiel die Parabel nehmen deren Gleichung $y'^2 = Ax'$ ist; wenn die, ihrer Tangente

$$2yy' = A(x + x')$$

ist, so wird sie

$$2\beta y' = A\alpha + Ax'$$

werden, und

$$y' = A\frac{(\alpha + x')}{2\beta}$$

geben. Der Punct in welchem die, durch diese Gleichung vorgestellten graden Linie, die Parabel berühren wird, wird der gesuchte Berührungspunct seyn.

Da die Gleichung bey der Tangente des Kreises

$$yy' + xx' = a^2$$

ist, (vorhergeh. Nr.) so wird man für diese Curve

$$\beta y' + \alpha x' = a^2$$

haben.

Endlich würde in der, durch

$$x'^3 - 3ax'y' + y'^3 = 0,$$

vorgestellten Curve sich der Berührungspunct finden, wenn man

man den Durchschnitt dieser Curve mit der Curve der zweyten Ordnung, welche aus der Gleichung

$$\beta(y'^2 - ax') + \alpha(x'^2 - ay) = ax'y'$$

hervorgehet, sucht.

243.

Um eine gerade Linie zu ziehen die eine gegebene Curve berührt, und welche zugleich parallel mit einer der Lage nach gegebenen graden Linie sey, oder welche mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet dessen Tangente durch a vorgestellt ist, so wird es hinreichend seyn, $\frac{dy'}{dx'} = a$ zu setzen (Nr. 238 und 198); wenn man diese Gleichung mit die der vorgelegten Curve combinirt, so wird man die Werthe von x' und y' bestimmen; welche dem verlangten Berührungspunct zukommen.

In dem Falle wo diese Curve die gemeine Parabel seyn würde, würde man haben

$$\frac{A}{2y'} = a,$$

welches geben würde

$$y' = \frac{A}{2a} \text{ und } x' = \frac{A}{4a^2}.$$

244.

Der Theil MT der Tangente, der zwischen den Berührungspunct und der Abscissenaxe liegt, ist leicht zu bestimmen, wenn man die Subtangente PT und die Ordinate PM kennt, denn man hat $\overline{TM}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PM}^2$; aber man kann sie unmittelbar berechnen, vermittelst ihren allgemeinen Ausdruck, welchen man finden wird, wenn man

für

für PT und PM ihre Werthe $y' \frac{dx'}{dy'}$ und y' setzt, welches giebt

$$TM = \sqrt{y'^2 + y'^2 \frac{dx'^2}{dy'^2}} = y' \sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}.$$

Wenn man diese Formel auf die Parabel anwendet, so findet man

$$TM = y' \sqrt{1 + \frac{4y'^2}{A^2}} = \frac{y'}{A} \sqrt{A^2 + 4y'^2}.$$

Wenn man y durch ihren Werth $\sqrt{Ax'}$ besetzt, so zieht man daraus

$$TM = \sqrt{Ax' + 4x'^2}.$$

245.

Die Gleichung der Linie MR, durch den Berührungspunct geführet, und senkrecht auf die Tangente, wird

$$y - y' = - \frac{dx'}{dy'} (x - x')$$

seyn (Nr. 238 und 199); wenn, um sie zu construiren man den Punct R haben will, wo sie die Abscissenaxe begegnet, so wird man $y = 0$ machen, und es wird kommen

$$AR = x = y' \frac{dy'}{dx'} + x':$$

wenn man AP oder x' von AR abziehet, so wird man

$$PR = y' \frac{dy'}{dx'}$$

haben.

Da der rechtwinklige Triangel PRM, $\overline{MR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PM}^2$ giebt, so wird man daraus ziehen

$$MR = y' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

Die

Die Linie MR ist unter den Nahmen Normale oder Perpendiculäre an der Curve bekannt, und der Theil PR von der Abscissenaxe, heißt, Subnormale. In der Parabel hat man

$$MR = y'\sqrt{1 + \frac{a^2}{4y'^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4y'^2 + A^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4Ax' + A^2}, \quad \text{und}$$

$$PR = \frac{A}{2}.$$

In dem Kreis ist

$$MR = y'\sqrt{1 + \frac{x'^2}{y'^2}} = a,$$

und $PR = -x'$. Folglich $AR = 0$, und in der That, ist die Normale eines Kreises nichts anders als der Radius dessen Werth beständig ist, und der jederzeit durch den Mittelpunct gehet.

Wenn man die Normale durch einen Punct, außerhalb der Curve genommen, ziehen müßte, oder parallel mit einer gegebenen Linie, so wird man dabey so, wie für die Tangente (Nr. 242) zu Werke gehen.

246.

Wenn man die, in den vorhergehenden Nr. gefundenen Resultaten einander nähert, werden wir haben

$$AT = x' - y'\frac{dx'}{dy'}, \quad PT = y'\frac{dx'}{dy'}, \quad MT = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}$$

$$AR = x' + y'\frac{dy'}{dx'}, \quad PR = y'\frac{dy'}{dx'}, \quad MT = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}};$$

und um diese Formeln bey einer beliebigen Curve anzuwenden, wird es hinreichen, darin an dessen Stelle den

aus

aus der Differential-Gleichung gezogenen Werth von $\frac{dy'}{dx'}$ oder den von $\frac{dx'}{dy'}$ zu setzen; man wird nachher vermittelst der primitiven Gleichung, diejenige der Coordinaten x' und y', welche man nur wird wollen, verjagen.

In allem was vorhergehet, haben wir vorausgesetzt, daß die Coordinaten x' und y' untereinander perpendicular wären: aber es ist leicht zu sehen, daß, wenn sie selbst einen beliebigen Winkel bilden würden, so würde die Gleichung von der Tangente doch ihre Gestalt nicht verändern, eben so wenig als die Werthe von AP und PT, welche unmittelbar daraus abgeleitet sind. In Rücksicht auf MT, auf MR und PR, würde man ihre Ausdrücke vermittelst der Triangel MTP, MTR und MPR finden, in welchen man entweder einen Winkel und zwey Schenkel, oder einen Schenkel und zwey Winkel kennt.

247.

Wenn man die Lagen, welche die Tangente einer vorgelegten Curve annimmt, wenn der Berührungspunct sich immer mehr und mehr vom Ursprunge der Coordinaten entfernt, sucht, so kann man erkennen ob diese Curve Asymptoten hat, und ihre Lage bestimmen.

Man sieht in der That, in einer Curve MX Fig. 26, welche eine grade Asymptote RS hat, daß je mehr sich der Punct M von dem Ursprunge entfernet, je mehr nähert sich die Tangente MT der Asymptote, und die Puncte T und D gehen respective gegen die Puncte R und E dergestalt daß AR und AE die Gränzen sind, welche die Werthe von AT und AD nicht überschreiten, nicht einmal erreichen können, von denen sie aber um so wenig als

man

man will unterschieden seyn können. Hieraus folgt, daß, um zu wissen ob eine Curve Asymptoten hat, man untersuchen muß ob die Ausdrücke von AT und von AD in Beziehung auf diese Curve, endlicher Grenzen fähig sind, und wenn dieses geschiehet, so werden, wenn diese Grenzen construirt sind, sie die zwey Puncte R und E geben, durch welche man die gerade Linie RS führt, die die geforderte Asymptote seyn wird.

Wir haben schon (Nr. 240) den Ausdruck von AT berechnet; was nun den von AD betrift, so wird man solchen finden, wenn man in der Gleichung von der Tangente, $x = 0$ macht, und es wird daraus entstehen

$$AD = y = y' - x' \frac{dy'}{dx'}.$$

Wir wollen das Vorhergehende auf die Gleichung

$$y'^2 = Ax'^2 + 2Bx'$$

anwenden; wir werden daraus ziehen

$$AT = x' - y' \frac{dx'}{dy'} = x' - \frac{Ay'^2}{Ax' + A} = - \frac{Bx'}{Ax + B}$$

$$AD = y' - y' \frac{dy'}{dx'} = y' - \frac{A'x'^2 + B'x'}{y'} = \frac{Bx'}{\sqrt{Ax'^2 + Bx'}}$$

die letztern Glieder dieser Gleichungen können unter die Formen gesetzt werden

$$- \frac{B}{A + \frac{B}{x'}} \text{ und } \frac{B}{\sqrt{A + \frac{B}{x'}}}:$$

Folglich ihre respectiven Grenzen sind, in dem Fall wo man x unendlich annimmt,

$$- \frac{B}{A} = AR \text{ und } \frac{B}{\sqrt{A}} = AE.$$

Wenn A Null wäre, so würden die Ausdrücke vo AT und von AD mit x' zu gleicher Zeit unendlich und

die vorgegebene Curve würde keine Asymptoten haben; sie wird eben so wenig welche haben, wenn A negativ wäre, weil alsdann ihre Gleichung für x keinen unendlichen Werth zulassen würde.

Betrachten wir noch die durch die Gleichung

$$x'^3 - 3ax'y' + y'^3 = 0$$

vorgestellten Curve, so hat man in dieser Curve

$$AT = \frac{ax'y'}{x'^2 - ay'}, \quad AD = \frac{ax'y'}{y'^2 - ax'}.$$

Um die Grenze zu finden, welche diese Ausdrücke nach Maaßgabe als x' zunimmt, zu erreichen suchen, so muß man anstatt y' ihren Werth in x' setzen, oder wenigstens das erste Glied von jeder dieser abnehmenden Reihen die man aus der vorgegebenen Gleichung ziehen könnte; man kann aber diese Resultate in dem gegenwärtigen Beyspiele, durch einen sehr einfachen analytischen Kunstgriff ersetzen. Macht man $x' = ty'$, so wird die vorgegebene Gleichung durch y^2 theilbar, und man zieht daraus

$$y = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

Es ist jetzt leicht zu sehen daß die Annahme von $t = -1$, y unendlich machen und geben wird $x' = -y'$. Verändert man in den Ausdrücken von AT und AD, x in y und nimmt die Grenzen, (Einl. Nr. 12 und 13) so wird man haben $AR = -a = AE$. Zieht man daher durch die aus den vorhergehenden Werthen construirten Puncte R und E (Fig. 8), die gerade Linie RE, so wird sie die Asymtote der Zweige AY und AZ seyn.

Bleibt eine der Größen AT oder AD endlich, während die andere unendlich wird, so ist evident daß die Asymptote parallel mit der Axe wäre, auf welche sich diese letzte befindet. Um keine der Asymptoten, welche die vorgege-

gegebene Curve haben muß zu verfehlen, so muß man succeſſive x' und y' unendlich machen, und in den Ausdrücken von AT von AD, jeden der verschiedenen Resultate, welche die eine oder die andere Hypotheſe giebt, ſetzen. Wenn AT und AD immer zu gleicher Zeit unendlich sind, so wird man daraus ſchließen, daß die vorgegebene Curve keine Aſymptote hat. Es könnte kommen, daß dieſe Größen beyde Null wären, in dieſem Falle hätte die Curve zur Aſymptote eine durch den Urſprung der Coordinaten gezogenen geraden Linie; da man aber alsdann nur einen Punct davon kennen würde, ſo müßte man davon die Richtung ſuchen, und dieſerwegen wird man die Grenze des Ausdrucks $\frac{dy'}{dx'}$ nehmen, welcher die Tangente des Winkels MTB für einen beliebigen Punct der Curve vorſtellt, und man würde die Tangente des Winkels SRB haben.

248.

Wir wollen jetzt unterſuchen was bey der vorgegebenen Curve geſchiehet, wenn einige Glieder der Reihe

$$k = ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots$$

verſchwinden oder nur unendlich werden.

Wir wollen zuerſt vorausſetzen, daß p, oder $\frac{dy'}{dx'}$, gleich Null ſey; in dieſer Hypotheſe wird der Winkel MTB Null, und die Tangente TM wird folglich parallel mit der Abſciſſenlinie ſeyn; wenn man im Gegentheile ſich denkt, daß p unaufhörlich zunimmt, ſo wird der Winkel MTB zu gleicher Zeit zunehmen, und wird damit aufhören, daß er ein rechter Winkel wird, wenn dieſer Coefficient wird unendlich geworden ſeyn. Die Tangente wird alſo auf der Abſciſſenaxe perpendicular ſeyn, oder parallel

lel mit der Axe der Ordinaten, wenn $\frac{dy'}{dx'}$ unendlich seyn wird.

Wenn es geschähe, daß der Ausdruck p oder von $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{0}{0}$ wird, alsdann hängt dieser Coefficient von einer Gleichung eines höhern Grades als der erste ab (Nr. 142) und wird mehrere Werthe haben, von welchen ein jeder eine Tangente für den betrachteten Punct geben, der folglich vielfach seyn würde.

249.

Ist p beliebig, so wird man haben

$$q = \frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

und der Unterschied zwischen die Ordinate der Curve, und der der Tangente wird sich auf

$$k - k' = rh^3 + sh^4 + \ldots$$

reducirt finden (Nr. 238) und da das Glied rh^3, welches vermittelst eines schicklichen Werths von h, die Summe aller derjenigen welche ihm folgen, übertreffen kann, zu gleicher Zeit mit h das Zeichen verändert, so folgt daraus daß die Größe $k - k'$ nach der Berührung ein, von dem vorhergehabten unterschiedenes Zeichen haben wird; NN' (Fig. 23) wird also auf einer Seite der geraden Linie MT, derjenigen entgegengesetzt seyn wo sich nn' befindet, und folglich wird die Curve eine Inflexion in M erleiden.

Wenn aber der Werth von x welcher q verschwinden läßt auch zugleicher Zeit r verschwinden läßt, so wird die Größe $k - k'$ welche alsdann zu sh^4 + u. s. w. reducirt ist, dasselbe Zeichen beybehalten, welches auch das von h seyn mag, und die Curve wird keine Inflexion erleiden.

Wenn

Wenn man dieses Raisonnement verallgemeinert, so wird man ohne Mühe sehen, daß jedesmahl, wenn das erste der Glieder welches nicht in $k - k'$ verschwindet, von einer ungeraden Potenz von h behaftet wird, die Curve eine Inflexion erleidet.

Daraus folgt, daß wenn man $\frac{d^2y'}{dx'^2} = o$, oder $\frac{d^2y'}{dx'^2} = o$ oder $\frac{d^3y'}{dx'^3} = o$ und $\frac{d^4y'}{dx'^4} = o$ u. s. w. hat, und man bey einen Coefficienten einer geraden Ordnung einhält, so wird die vorgegebene Curve eine Inflexion erleiden.

Ueberhaupt, nach einem Inflexionspunct nimmt der Coefficient $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ in Beziehung auf die Ordinate ein dem Vorhergehenden entgegengesetztes Zeichen, und wenn er durch einen Punct ausgedrückt ist, so kann diese Veränderung auf zwey Arten geschehen, nemlich durch den Uebergang seines Nenners, da im zweyten Falle der Nenner Null wird, so macht er den Bruch unendlich.

Wir wollen dies durch ein Beyspiel erläutern; Die Gleichung sey $y'^3 = x'^5$, man wird daraus ziehen

$$y' = x'^{\frac{5}{3}} \quad \frac{dy'}{dx'} = \tfrac{5}{3}\, x'^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{2}{3} x'^{-\frac{1}{3}} \text{ u. s. w.}$$

und man wird folglich haben

$$k - k' = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{2}{3} x'^{-\frac{1}{3}} h^2, \text{ u. s. w.}$$

Dieses Resultat lehret uns, daß wenn x' und y' positiv ist, die Curve sich über ihre Tangente befindet, und daß, wenn x' negativ wird, welches y' auch negetiv macht, so befindet sie sich unter ihr; woraus folgt, daß sie bey dem Uebergange von x' positiv zu x' negativ eine Inflexion erleidet. Man wird auch bemerken daß $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ nur

 ihr

ihr Zeichen verändert, wenn sie durchs Unendliche geht.

Aus dem Vorhergehenden kann man also schliessen, daß in einem Inflexionspunct $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ entweder Null oder unendlich ist.

250.

Jetzt wollen wir sehen, was für ein Rückkehrpunct der ersten Art statt finden muß.

Die Ordinate hat in diesem Puncte zwey gleiche Werthe, die Tangente MT ist darin zweyen Zweigen gemein, endlich, wenn man den Ursprung der Coordinaten dahin bringt, so sollte die Größe K wenigstens zwey Werthe haben QN und Qn (Fig. 27) die Reihe welche sie ausdrückt, kann also nicht mehr von der Form

$$ph + qh^2 + rh^3 \ldots \text{(Nr. 129)}$$

seyn, auch werden die Coefficienten p, q, r, u. s. w. entweder Null oder unendlich werden.

Es sey z. B. die Gleichung $y'^2 = x'^3$ welche giebt

$$y' = \pm x'^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dy'}{dx'} = \pm \tfrac{3}{2} x'^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} x'^{-\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

woraus

$$k - k' = \pm \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} x'^{-\frac{1}{2}} h^2 + \ldots$$

Wenn die Differenz $k - k'$ in dem Zweige zu welchem die Ordinate $y' = + x'^{\frac{3}{2}}$ gehört, positiv, und in dem Zweig, welchen man von $y' = - x'^{\frac{3}{2}}$ ableitet, negativ ist, so folgt daraus, daß der erste Zweig, sich über der Tangente und der zweyte sich unter der Tangente befinden wird; sie werden also beyde ihre Convexität der Abscissenaxe zukehren, so wie man es in der Figur 13 sieht, und

und da die Curve sich nicht auf die negativen Abscissen erstreckt, so ist es ganz evident, daß sie im Puncte A eine Rückkehr der ersten Art haben wird. In diesem Puncte wo $x' = 0$, wird

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \pm \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} x'^{-\frac{1}{2}}$$

ist unendlich.

Wenn man die Ordinaten für die Abscissen und die Abscissen für die Ordinaten nähme, so würde man alsdann haben

$$x' = y'^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dx'}{dy'} = \tfrac{2}{3} y'^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{d^2x'}{dy'^2} = -\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} y'^{-\frac{4}{3}}, \text{ u. s. w.}$$

und wegen

$$h = \frac{dx'}{dy'} \frac{k}{1} + \frac{d^2x'}{dy'^2} \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

würde man finden

$$h - h' = -\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} y'^{-\frac{4}{3}} \frac{k'^2}{1 \cdot 2} + \text{u. s. w.}$$

Man wird noch die Rückkehr erkennen, wenn man bemerkt, daß wenn $y'^{-\frac{4}{3}}$ nicht das Zeichen verändert, und y' vom Positiven zum Negativen übergeht, die Differenz $h - h'$ negativ ist, es sey in dem Zweig AX oder in dem Zeig AX', welches beweißt, daß sie ihre Concavität der Axe AC zukehren; man sieht außerdem, daß sie bey dem Punct A einhalten, weil x' niemals negativ wird.

Wenn man hätte $y'^2 = x'^5$ so würde man bey dem Rückkehrpuncte

$$x', \quad y', \quad \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2}$$

Null, und $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ u. s. w. unendlich, finden.

Wir werden also aus dem Vorhergehenden schließen, daß, bey dem Rückkehrpunct der ersten Art, so wie bey dem Inflexionspunct $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ Null oder unendlich wird; aber die Rückkehr unterscheidet sich darinn, daß die Curve bey diesem Punct einhält, welches sie bey dem Inflexionspunct nicht thut.

251.

Wir wollen noch die Gleichung $(ay' - x'^2)^2 = \frac{x'^5}{a}$ (Seite 105) untersuchen, macht man $a = 1$, so werden wir daraus ziehen

$$y' = x'^2 \pm x'^{\frac{5}{2}}, \qquad \frac{dy'}{dx'} = 2x' \pm \tfrac{5}{2}\, x'^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = 2 \pm \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{d^3y'}{dx'^3} = 0 \pm \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}x'^{-\frac{1}{2}}, \text{ u. s. w}$$

und folglich

$$k - k' = (2 \pm \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}})h^2 + \text{u. s. w.}$$

Der Zweig AX (Fig. 14) für welchen man hat

$$y' = x'^2 + x'^{\frac{5}{2}} \text{ und } k - k' = (2 + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}})h^2 \ldots$$

kehrt immer seine Convexität der Abscissenaxe zu; der durch $y' = x'^2 - x'^{\frac{5}{2}}$ gegebene Zweig AX' wird auch seine Convexität derselben Axe zukehren, so lange als

$$k - k' = (2 - \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}})h^2 + \ldots$$

eine positive Größe seyn wird, und da diese zwey Zweige sich nicht nach der Seite der negativen x ausbreiten, so wird der Punct A ein Rückkehrpunct der zweyten Art seyn. Ist die Größe $2 - \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}$ negativ geworden, so wird die Curve ihre Concavität der Axe AB zukehren, so

wie

wie man es in der Figur sieht, und man wird die Abscisse welche dem Inflexionspuncte entspricht, finden, wenn man $2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} x'^{\frac{1}{2}} = 0$ macht, welches geben wird

$$x' = \frac{64}{225}.$$

Man hat, bey dem Punct A, wo die Rückkehr der zweyten Art geschiehet, $\frac{dy'}{dx'} = 0$, $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 2$ und $\frac{d^2 y'}{d x'^3}$ wird unendlich, so wie die fernern Coefficienten, und in der That muß k in diesem Punct zwey unterschiedene Werthe haben, welches die Reihe die es ausdrückt, nicht enthält.

252.

Die bloße Ansicht der Fig. 28 läßt auch sehen, daß, wenn der Punct M die Gränze der Curve in der Richtung Abscissen ist, die Größe k wenigstens zwey Werthe QN und Qn haben muß; die Reihe welche es ausdrückt kann nicht mehr von der Form $ph + qh^2 + rh^3 \ldots$ seyn, und die Coefficienten p, q, r, . . . werden unendlich. Man wird überdem noch bemerken, daß in diesem Falle, die Tangente mit der Ordinatenaxe parallel ist, ein Umstand welcher $\frac{dy'}{dx'}$ unendlich macht (Nr. 248).

Man sieht also jetzt, daß die Ausnahmen, welche wir (Nr. 128 und 135) gezeigt haben, in der Form der Entwickelung von $f(x + k)$ (wie wir es Nr. 143 gesagt haben), eine nothwendige Folge der Affectionen der krummen Linien, und dienen dazu sie kennen zu lernen. Auf diese Art also bestätigen und erläutern die geometrischen Betrachtungen die Resultate der Analysis.

Die Theorie der Osculationen von welchen wir bald sprechen werden, wird ein neues Licht über alles Vorhergehende werfen.

Es ist gut zu bemerken, daß die Functionen $y' = x'^{\frac{1}{3}}$ und $y' = x'^{\frac{2}{3}}$ (Nr. 249 und 250) in der Function $y = (x - a)^n$ begriffen sind die wir in Nr. 28 betrachtet haben und die $y' = x'^n$ wird, wenn man den Ursprung der Abscissen in dem Punct wo $x = a$ ist, versetzt, welches in dem Lauf der Linie, von welcher sie die Ordinate ausdrückt, nichts ändert. Die Gleichung $y' = x'^2 \pm x'^{\frac{5}{2}}$, wird auch abgeleitet von

$$y = bx^m + c(x - a)^{\frac{p}{q}} \text{ (Nr. 132);}$$

wenn man

$$b = 1, \quad m = 2, \quad c = 1, \quad a = 0 \text{ und } \frac{p}{q} = \frac{5}{2}.$$

macht.

253.

Es folgt aus Nr. 248 daß, um die Puncte wo die Tangente mit der Abscissenlinie parallel ist, zu finden, man $\frac{dy'}{dx'} = 0$ machen muß; die Figur 28 zeigt, daß die Puncte L und l wo dieser Umstand statt hat die Gränzen der Curve MLml sind in der Richtung ihrer Ordinate, und daß der eine dem Maximum und der andre dem Minimum der Werthe dieser veränderlichen Größe entspricht, man unterscheidet den ersten Fall von dem zweyten indem man bemerkt, daß in dem einen Falle die Curve ihre Concavität der Abscissenaxe und in dem andern Falle ihre Convexität der Abscissenaxe zudreht: $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ ist also ne-

gativ

gativ im Fall des Maximum und positiv im Fall des Minimum.

Wenn $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ verschwindet, so muß $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ auch verschwinden, ohne daß $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ verschwindet u. s. w. oder weder $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ noch einer der folgenden Coefficienten unendlich werden, denn in diesen Fällen würde die vorgegebene Curve die Figur MLX oder Mlx haben; d. h. entweder einen Inflexionspunct oder einen Rückkehrpunct; aber die Ordinate würde weder ein Maximum noch ein Minimum seyn. Endlich um ein Maximum oder Minimum zu erhalten so muß auch $\frac{dy'}{dx'}$ nicht $\frac{0}{0}$ werden, weil der Punct M alsdann ein Vielfacherpunct seyn würde, (Nr. 248) wir sind also jetzt durch die geometrischen Betrachtungen auf die in Nr. 148 und folgende gegebenen Regeln zurückgekommen.

Wir werden die Gränzen der Curve in der Richtung der Abscissen erhalten, wenn man die Puncte sucht, wo die Tangente mit der Ordinatenaxe parallel ist, d. h. wenn man $\frac{dy'}{dx'}$ unendlich macht, oder wenn man den Nenner des Bruchs, welchen er ausdrückt, gleich Null setzt; man kann diese Puncte noch als zu Maxima und zu Minima der veränderlichen x entsprechend betrachten. In diesem Falle müße man x' als eine Function von y' ansehen, und den Werth von $\frac{dx'}{dy'}$ gleich Null setzen, ein Verfahren welches mit dem Vorhergehenden auf eins hinausläuft weil $\frac{dx'}{dy'}$ das Umgekehrte von $\frac{dy'}{dx'}$ ist.

254.

Wenn die Maxima und Minima einer Curve gefunden sind, es sey in Beziehung auf die Abscisse, oder in Beziehung auf die Ordinate, so wird man ihre Vielfachenpuncte suchen, indem man den Zähler und den Nenner von $\frac{dy'}{dx'}$ gleich Null setzt, weil man in diesen Puncten haben muß $\frac{dy'}{dx'} = \frac{0}{0}$ (Nr. 248); da die zwey Gleichungen, welche diese Regel geben wird, hinreichend sind, um x' und y' zu bestimmen, so müssen sie nothwendig mit der vorgelegten Gleichung übereinstimmen, sonst würde die durch diese letzte Gleichung vorgestellte Curve keinen Vielfachenpunct haben.

255.

Um endlich die Inflexions- und Rückkehrpuncte zu finden, müßte man $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ entweder gleich Null oder unendlich machen, d. h. den Zähler und den Nenner seines Ausdrucks successive gleich Null setzen. Wenn man die Werthe von y' und x' die aus der auf diese Art erhaltenen Gleichung, mit der vorgegebenen verbunden hervorgehen, bestimmt haben wird, so wird das Zeichen, welches $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ und unmittelbar vor und nach diesen Puncten haben muß, und das was in dem einen und dem andern Falle der Werth von y' wird, die Inflexionspuncte von den Rückkehrpuncten unterscheiden lassen. Man kann auch diese letztern finden, wenn man gleich die Vielfachenpuncte sucht, und nachher untersucht was x' und y' vor

und

und nach einem jeden dieser Puncte werden. Man wird aus den Zeichen der verschiedenen Ausdrücken von $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ in Beziehung auf die Puncte welche vorhergehen oder folgen beurtheilen, ob die Rückkehr von der ersten oder von der zweyten Art ist.

256.

Ich will jetzt einige Anwendungen geben, und werde zuerst als Beyspiel der Untersuchung der Maxima und der Minima, die Gleichung

$$x'^3 - 3ax'y' + y'^3 = 0,$$

(von welcher ich schon in Nr. 153 gehandelt habe,) nehmen. Man ziehet daraus

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{ay' - x'^2}{y'^2 - ax'},$$

und wenn man zuerst den Zähler gleich Null setzt, so kommt daraus

$$ay' - x'^2 = 0;$$

wenn man den Werth von y' welchen diese Gleichung in der vorgelegten giebt, substituirt so findet man

$$x'^6 - 2a^3x'^3 = 0.$$

Die Untersuchung welche wir in der angeführten Nr. von einem jeden der Werthe welche diese letzte Gleichung giebt angestellt haben, läßt uns erkennen, daß $x' = a\sqrt[3]{2}$ die einzige ist, welche einem Maximum entspricht, man ziehet daraus $y' = a\sqrt[3]{4}$ wenn man in Fig. 8, $AS = a\sqrt[3]{2}$ und $SL = a\sqrt[3]{4}$ nimmt, so wird der Punct L der seyn, bey welchem das Maximum statt hat.

Wenn

Wenn man nachher den Nenner von $\frac{dy'}{dx'}$ gleich Null setzt, so wird man finden

$$y'^2 - ax' = o:$$

man sieht, ohne die Rechnung zu machen, durch die Symmetrie der Resultate, daß in diesem zweyten Falle der Werth von x', derselbe seyn wird, als der von y' in dem vorhergehendem Falle, und der Werth von y' derselbe als der Werth von x', und daß man folglich den Punct X finden wird, wenn man $AV = a\sqrt[3]{4}$ und $VX = a\sqrt[3]{2}$ nimmt.

Wenn man den Zähler und den Nenner zu gleicher Zeit gleich Null macht, so kommt $x' = o$ und $y = o$, Werthe die man auch in den Gleichungen, welche Maxima und Minima geben, wieder findet, und welche uns lehren, daß der Ursprung A ein Vielfacherpunct ist. Um die Tangente bey diesem Punct zu kennen, muß man zum zweyten mahl die vorgelegte Gleichung differentiiren, indem man dx' und dy' als beständige Größen (Nr. 142) betrachtet, und x' und y' gleich Null annimmt, man wird finden

$$3a\,dx'\,dy' = o$$

eine Gleichung, welcher man genugthun wird, es sey, indem man $\frac{dy'}{dx'} = o$, oder $\frac{dx'}{dy'} = o$ macht; daraus folgt, daß eine der Tangenten selbst, die Abscissenaxe, und die andere die Ordinatenaxe ist, wie man es schon Nr. 224 gefundrn hat. Um zu zeigen wie die Analysis alle geometrische Umstände getreu darstellt, so werde ich bemerken lassen, daß unter den zwey Nullen Werthen, welche man für x in Nr. 153 gefunden hat, sich ein Werth befindet, welcher die Bedingungen des Minimum's erfüllt; und

in

in Wahrheit ist, in dem Zweig YAX der vorgelegten Curve, welche die Abscissenaxe AB berührt, die Ordinate allerdings ein Minimum in dem Punct A. Man sieht auf eben die Art, daß die Abscissen desselben Punctes, ein Minimum in dem Zweige AZ ist, der durch die Ordinatenaxe berührt, wird.*)

257.

Wir wollen noch die, in der Figur 9 vorgestellte Curve betrachten; ihre Gleichuug

$$y'^4 - 96a^2y'^2 + 100a^2x'^2 - x'^4 = 0$$

giebt

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x'^3 - 50a^2x'}{y'^3 - 48a^2y'}.$$

Wenn man den Zähler dieses Bruchs gleich Null setzt, so wird man

$$x' = 0, \text{ und } x'^2 - 50a^2 = 0$$

finden, der erste Werth von x', in der vorgelegten Gleichung substituirt, giebt

$$y' = 0 \text{ und } y' = \pm\sqrt{96a^2},$$

aber da, wenn man

$$x' = 0 \text{ und } y' = 0$$

macht $\frac{dy'}{dx'} = \frac{0}{0}$ kömmt, so folgt daraus, daß, diese Werthe

*) Die Curve der Fig. 8. verbunden, mit den bemerkungswürdigen Particularitäten, welche wir schon haben kennen lernen, nemlich, daß sie durch eine gerade durch den Punct A senkrecht auf ihrer Asymptote gezogenen Linie in zwey gleiche Theile getheilt wird. Man kann sich von dieser letzten Eigenschaft versichern, wenn man den absoluten Durchmesser durch das in Nr. 219 vorgeschriebene Verfahren sucht.

Werthe weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum gehören, und daß sie einen Vielfachenpunct anzeigen. Man wird versichert seyn, daß der zweyte Werth von y', nemlich $y' = + \sqrt{96a^2}$, welcher dem Punct D entspricht ein Maximum ist, es sey indem man sucht was alsdann $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ wird, oder es sey indem man auszumachen sucht, ob die ihr vorhergehende Ordinate und die, welche ihr unmittelbar folgt, alle beyde kleiner sind als sie selbst:

$$y' = - \sqrt{96\,a^2}$$

ist das den negativen Ordinaten entsprechende Maximum. Es bleibt uns noch übrig die Wurzeln der Gleichung

$$x'^2 - 50\,a^2 = 0,$$

welche sind

$$x' = \pm \sqrt{50\,a^2}$$

zu untersuchen; setzt man sie in der vorgelegten Gleichung, so machen sie y' imaginair, und geben folglich weder ein Maximum noch ein Minimum. Wollte man die Lagen von der Curve in dem Punct A kennen, für welchen man so eben gesehen hat, daß $\frac{dy'}{dx'}$ sich auf $\frac{0}{0}$ reducirt, so würde man zum zweyten mahle die vorgelegte Gleichung differentiiren, indem man dx' und dy' als beständige Größen betrachtet; und wenn man nachher im Resultate x' und y' gleich Null macht, so würde man bekommen

$$48\,a^2\,dy'^2 - 50\,a^2\,dx' = 0,$$

welches geben würde

$$\frac{dy'}{dx'} = \pm \sqrt{\tfrac{50}{48}} = \pm \tfrac{5}{4} \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Ver-

Vermittelst dieser zwey Werthe wird man sehr leicht die grade Linien, welche jeden der Zweige der vorgelegten Curve im Puncte A berührt, construiren, weil man den Winkel, welchen sie mit der Abscissenaxe bilden kennen würde, oder das Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen, welche diesen Winkel ausmachen. (Nr. 196.)

Um die Gränzen der Curve in der Richtung der Abscissen oder, welches einerley ist, die Maxima und Minima von x' zu bekommen, muß man den Nenner des Bruchs welcher $\frac{dy'}{dx'}$, ausdrückt, gleich Null setzen, dieses giebt die Gleichung

$$y'^3 - 48a^2y' = 0$$

woraus

$$y' = 0 \text{ und } y' = \pm\sqrt{4\ a^2}.$$

Der erste Werth giebt $x' = 0$, und entspricht nur den bey dem Ursprunge gelegenen Vielfachenpuncte, man zieht aber aus den zwey letzten

$$x' = \pm 6a \quad \text{und} \quad x' = \pm 8a:$$

Eins dieser Resultate zeigt uns den Punkt F und seine Analogen; das andre Resultat giebt H und seine Analogen, und beyde stimmen mit dem was wir in Nr. 204 gefunden haben, überein. Man wird bemerken, daß die Abscisse in dem Punct G ein Maximum und in dem Punct H ein Minimum ist, weil in dem ersten Punct die Curve ihre Concavität der Ordinatenaxe AC zukehrt, der sie in den zweyten Punct ihre Convexität zukehrt. Um die Bestimmung der vornehmsten Umstände der vorgelegten Curve zu beendigen, so bleibt uns noch übrig die Natur ihrer unendlichen Zweige und ihre Inflexionspuncte zu finden, denn wir wissen bereits, daß sie gar keine Rückkehr hat. Wir wollen jetzt anfangen uns mit den

unendlichen Zweigen zu beschäftigen; man sieht leicht, daß x' und y' zu gleicher Zeit unendlich werden, und wenn man die Gleichung $y'^4 - 96a^2y'^2 + 100a^2x'^2 - x'^4 = 0$, die folgende Gestalt $\frac{y'^4}{x'^4} - 96a^2 \frac{y'^2}{x'^4} + 100 \frac{a^2}{x'^2} - 1 = 0$ giebt, so wird man finden, daß das Verhältniß $\frac{y'}{x'}$ die Einheit zur Gränze hat. Wenn man in dem Ausdruck von $\frac{dy'}{dx'}$, $y' = x'$ macht, und die Gränze nimmt, so wird man noch die Einheit finden, woraus folgt, daß der Zweig HX und seine Analogen ohne Ende dahin sich bemühen mit der Absciſsenaxe einen Winkel von 45° zu bilden.

Man wird nachher haben

$$x' - y' \frac{dx'}{dy'} = \frac{x'^4 - 50a^2x'^2 - y'^4 + 48a^2y'^2}{x'^3 - 50a^2x'^2}$$

$$y' - x' \frac{dy'}{dx'} = \frac{y'^4 - 48a^2y'^2 - x'^4 + 50a^2x'^2}{y'^3 - 48a^2y'^2}$$

Diese Ausdrücke, welche, wenn man statt x'^4 ihren Werth setzt, sich auf

$$\frac{50a^2x'^2 - 48a^2y'^2}{x'^3 - 50a^2x'^2}, \quad \frac{48a^2y'^2 - 50a^2x'^2}{y'^3 - 48a^2y'^2}$$

reduciren, nehmen unaufhörlich ab, nach Maaßgabe als x' und y' zunehmen, und haben nur Null zu ihrer Gränze. Man sieht daraus, (Nr. 246) daß die vorgelegte Curve zur Asymtote zwey grade, durch den Ursprung A geführte Linien hat, die mit der Absciſsenaxe einen Winkel von 45° bilden. Man hat um die Figur nicht zu complicirt zu machen, diese grade Linien nicht gezogen. Wir wollen jetzt zur Aufsuchung der Inflexionen übergehen. Man hat

d^2y'

$$\frac{d^2 y'}{dx'^2} = \frac{(3x'^2 - 50a^2) - (3y'^2 - 48a^2)\frac{dy'^2}{dx'^2}}{y'^3 - 48a^2 y'}$$

dieser Ausdruck wird $\frac{0}{0}$, wenn y' und x' Null sind, ein Fall in welchem $\frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{50}{48}$; um seinen wahren Werth zu finden, wird man das dritte Differential der vorgelegten Gleichung suchen müssen, indem man d^2y' als beständig betrachtet: macht man im Resultate x' und y' gleich Null, so wird man haben

$$-144a^2 dy' \,.\, d^2y' = 0,$$

welches giebt, $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, und beweiset daß der Punkt A wirklich ein Inflexionspunct ist.

Wir wissen, daß die vorgelegte Curve deren noch andere hat; um sie zu finden, muß man den Zähler von $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ gleich Null setzen, und es wird die Gleichung

$$3x'^2 - 50a^2 - (3y'^2 - 48a^2)\frac{dy'^2}{dx'^2} = 0$$

kommen; wenn man für $\frac{dy'^2}{dx'^2}$ ihren Werth setzt, und den Nenner verschwinden läßt, so wird man haben

$$(3x'^2-50a^2)(y'^3-48a^2y')^2-(3y'^2-48a^2)(x'^3-50a^2x')^2=0:$$

Man kann diese Gleichung folgende Gestalt geben,

$$y'^2(y'^2-48a^2)^2(3x'^2-50a^2)-x'^2(x'^2-50a^2)^2(3y'^2-48a^2)=0.$$

Wenn man jetzt bemerkt, daß die vorgelegte Gleichung selbst zu dieser zurückkömmt,

$$(y'^2 - 48a^2)^2 - (x'^2 - 50a^2)^2 + 196a^4 = 0,$$

und wenn man den Werth von $(y'^2 - 48a^2)^2$ nimmt, um ihm in der vorhergehenden Gleichung zu setzen, so wird man nach den Reductionen finden:

$(x'^2 - 50a^2)^2 (25y'^2 - 24x'^2) + 98a^2y'^2(3x'^2 - 50a^2) = 0$:
Diese letzte mit der vorgelegten Gleichung verbunden, wird dazu dienen, die Abscissen und Ordinaten, des Inflexionspunct K und von seinen Analogen in den andern Zweigen zu bestimmen; man wird leicht daraus den Werth von y'^2 ziehen, und wenn man ihn in der Gleichung der vorgelegten Curve setzt, so wird man ein Resultat haben, welches nur noch x' enthalten wird.

Wenn man $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ unendlich macht, oder seinen Nenner $y'^2 - 48a^2$ gleich Null setzt, so würde man $y' = 0$, und $y' = \pm\sqrt{48a^2}$ finden, diese Werthe lehren uns nichts neues; der erste gehört dem Punct A, welchen wir schon bemerkt haben, und der zweyte gehört den Puncten F und H, von welchen wir wissen, daß sie keine Inflexionspuncte, sondern bloß Gränzen der Curve in der Richtung der Abscissen sind.

258.

Theorie von den Osculationen der Curven.

Ob man gleich keine grade Linie zwischen einer Curve und ihrer Tangente ziehen kann, so kann man demohngeachtet eine unendliche Anzahl andere verschiedene krumme Linien durchgehen lassen, welche alle die vorgelegte Curve berühren, und durch ihre Tangente berührt werden. Der Kreis bietet ein sehr einfaches Beyspiel von diesem Fall dar; man sieht in den Anfangsgründen der Geometrie, daß, wenn ein Kreis durch irgend eine grade Linie berührt ist, alle diejenigen Kreise welche durch den Berührungspunct gehen, und ihren Mittelpunct auf der durch diesen Berührungspunct und den Mittelpunct des ersten

stern Kreises gezogenen graden Linie haben, sich zwischen ihm und seiner Tangente befinden, wenn sie einen größern Radius als den seinigen haben.

Wenn man in der Reihe

$$k = ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots \quad (k)$$

successive

$k' = ph$, $k'' = ph + qh^2$, $k''' = ph + qh^2 + rh^3$ u. s. w.

macht, so wird k' wie man weiß, die Ordinate der Tangente, in Beziehung auf der Axe MB′ und den Ursprung M, (Fig. 29) genommen seyn, k'' wird die Ordinate einer parabolischen Curve seyn, die auch durch diesen Punct gezogen, und durch die besondern Werthe, welche die Coefficienten p und q bey den Punct M annehmen, bestimmt sind: k''' wird noch die Ordinate einer parabolischen Curve seyn, aber von einer höheren Ordnung als die vorhergehende u. s. w. Jetzt ist es leicht sich zu überzeugen, daß die erste Parabel zwischer der Curve und ihrer Tangente, und daß die zweyte Parabel zwischen die erste und der Curve durchgehet; eine dritte auf derselben Art gebildete Parabel würde zwischen der zweyte und der Curve durchgehen, u. s. w. In der That, wenn man die Unterschiede zwischen der Ordinate der Curve, den Unterschied der Tangente, und den von einer jeden der Parabel die darauf folgen, so wird man finden.

$$NN' = k - k' = qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots$$
$$NN'' = k - k'' = rh^3 + sh^4 + \ldots$$
$$NN''' = k - k''' = sh^4 + \ldots$$

. . .

und wennn die Absciße h klein genug seyn wird, damit ein beliebiges Glied der Reihe, welches den Werth von k ausdrückt, größer sey, als die Summe aller folgenden

Glieder, so ist augenscheinlich, daß alsdann NN'' geringer seyn wird als NN', NN''' geringer als NN'' u. s. w. Macht man h negativ, so wird man eben so

$$nn'' < nn', \quad nn''' < nn'' \text{ u. s. w.}$$

finden. Die Curve MY'' geht also zwischen der Tangente MY', und der vorgegebenen Curve MX durch; eben so geht auch die Curve MY''' zwischen MY'' und MX durch u. s. w.

Jede der Linien MY', MY'', MY''', u. s. w. die sich mehr der vorgelegten Curve als die ihr vorhergehende nähert, kann angesehen werden, als hätte sie einen vollkommnern Berührungspunct oder von einer höhern Ordnung als der, welcher sich zwischen diese zwey letztern befindet. Die Ordnung der Berührung ist durch die Anzahl der Glieder, welche der Reihe (k) und der Gleichung der berührenden Curve gemein sind, angezeigt.

Die Curven MY'', MY''' u. s w. besitzen alle eine Eigenschaft, derjenigen analog, welche den Caracter der Tangente bildet (Nr. 231); so wie auch, daß man zwischen diese Linie und der Curve, keine andre grade Linie durchziehen kann, eben so kann man zwischen der Parabel MY'' und der Curve MX, keine Parabel der zweyten Ordnung durchgehen lassen. Um sich davon zu überführen ist es hinreichend eine Parabel dieser Ordnung auf der Abscisse h bezogen, und durch die Gleichung

$$k_{,} = Ah + Bh^2$$

vorgestellt, zu betrachten, man wird sehen, daß so lange als A und B von p und q differiren werden, die Größe $k - k_{,}$ es sey positiv oder negativ, die Größe $k - k''$ übertreffen wird. Hätte man $A = p$, welchen Werth auch übrigens der Coefficient B haben möchte, so würde dennoch die, durch die Gleichung

$k_{,} =$

$$k_{,} = ph + Bh^2$$

gegebene Parabel, dieselbe Tangente als die vorgegebene Curve MX, haben, und sie folglich auch berühren. Es folgt daraus, daß es eine unendliche Anzahl Parabeln giebt, die eine Berührung von der ersten Ordnung, mit einer gegebenen Curve haben können, daß es aber auch nur eine giebt, die eine Berührung von der zweyten Ordnung haben kann; um diese letztern von allen andern zu unterscheiden, wollen wir sie Berührungsparabel nennen. Man wird eben so sehen, daß unter die durch die Gleichung

$$k_{,,} = Ah + Bh^2 + Ch^3$$

vorgestellten parabolischen Curven, sich eine unendliche Anzahl befinden werden, die mit der Curve MX Berührungen von der ersten und zweyten Ordnung haben werden; aber daß eine einzige nemlich die, wo

$$A = p, \quad B = q, \quad C = r,$$

ist, eine Berührung der dritten Ordnung haben kann, sie wird also die zweyte Berührungsparabel seyn, und eben so mit den andern.

Wenn die vorgegebene Curve, keine Inflexion bey den Punct, welchen man betrachtet, erleidet, so befindet sie sich auf dieselbe Seite der Tangente, unmittelbar vor und nach der Berührung, aber es ist nicht dasselbe in Rücksicht der ersten Berührungsparabel: denn der Unterschied NN'', dessen Zeichen immer von seinem ersten Gliede rh^3 abhangen kann, indem man h schicklich nimmt, verändert mit dieser Größe zu gleicher Zeit das Zeichen, welches beweiset, daß die Curve MY'', von der einen zur andern Seite der Curve MX übergehet; es giebt also auf eine gewisse Weise Berührung und Durchschnitt zwischen diese beyde Curven. Wenn man Mühe hätte diesen Um-

stand zu begreifen, so müßte man sich erinnern, daß die Tangente im Inflexionspuncte die vorgelegte Curve schneidet, und sie dennoch berührt. Dasselbe wird auch allen osculirenden Curven von einer graden Ordnung wiederfahren; nur die osculirenden Curven von einer ungraden Ordnung allein sind alle auf derselben Seite in Rücksicht auf der vorlegten Curve, *)

Wenn unter den Coefficienten der Reihe (k) sich welche finden die Null sind, so bekömt dadurch die osculirende Linie der niedern Ordnung beym ersten dieser Glieder, eine Berührung von einer höhern Ordnung als die seinige; wenn also der Coefficient q Null ist, so hat alsdann die Tangente eine Berührung von der zweyten Ordnung, weil $k - k'$ zu

$$rh^3 + sh^4 + \ldots$$

wird, oder, was einerley ist, die erste Berührungsparabel wird zu einer graden Linie, und fällt mit der Tangente zusammen; die zweyte Berührungsparabel würde mit der ersten zusammenfallen, wenn man $r = 0$ hätte: beyde würden sich mit der Tangente vereinigen, wenn q und r zu gleicher Zeit Null wären. Es ist leicht, diese Betrachtungen nach den Umständen, welche sich darbieten können,

*) Wenn man die Unterschiede zwischen der Ordinate einer jeden der osculirenden Linien, und die der vorhergehenden, nimmt, so wird man haben:

$$k' = ph = QN', \quad k'' - k' = qh^2 = QN'' - QN',$$
$$k''' - k'' = rh^3 = QN''' - QN'',$$

Resultate, welche darin bemerkungswerth sind, daß sie den linearischen Ausdruck der Glieder von der Reihe (k) vorstellen.

können, auszudehnen und zu modificiren. Wenn die Glieder der Reihe (k) $\frac{0}{0}$ oder unendlich werden, so muß man alsdann seine Zuflucht zu der allgemeinern Reihe

$$k = Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \ldots$$

nehmen, welche aus der vorgelegten Gleichung durch die in Nr. 134 angezeigte Verfahrungsarten abgeleitet ist, und welche in Beziehung des betrachteten particulären Punkts die parabolischen Berührungscurven geben wird. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Curven vom parabolischen Geschlechte nicht die einzigen sind, welche die osculirenden einer gegebenen Curve seyn können.

259.

Wenn man begreift, daß irgend eine Curve durch den Punct M gehet, und folglich in diesem Punct dieselbe Coordinaten AP und PM als die vorgelegte hat, und daß man durch K die Ordinate dieser Curve in Beziehung auf die Axe MB′ und der Absciße QM = h vorstellt, man in ihre Gleichung, welche ich durch (V) so wie sie selbst, bezeichnen werde, $x' + h$ und $y' + k$ statt x und y setzt, so wird man für K eine Reihe von der Form

$$K = Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \ldots$$

finden, und es wird folglich kommen

$$k - K = (p - P)h + (q - Q)h^2 + (r - R)h^3 + (s - S)h^4 + \ldots$$

Wenn p gleich P seyn wird, so wird diese Curve dieselbe Tangente als die vorgelegte haben, und in diesem Falle werden sie sich einander berühren. Man sieht auch, daß so lange als q und Q nicht von entgegengesetzten Zeichen seyn werden, die zweyte Curve zwischen der vorgelegten

Curve und ihrer Tangente durchgehen wird, denn da alsdann $k - K$ auf

$$(q - Q)h^2 + (r - R)h^3 + \ldots$$

reducirt ist, so wird diese Differenz kleiner seyn als

$$k - k' = qh^2 + rh^3 + \ldots$$

wenn die Abscisse h dergestalt genommen wird, daß das erste Glied von einer jeden dieser Reihen die Summe aller ihm folgenden übertrift; der Unterschied $q - Q$ mit q verglichen, wird uns die respective Lage der berührenden Curve (V) in Betracht der vorgegebenen Curve und ihrer Tangente kennen lehren. Die Berührung der vorgelegten Curve mit die Curve (V) würde von der zweyten Ordnung seyn, wenn man zu gleicher Zeit

$$p - P = 0, \quad q - Q = 0$$

hätte; von der dritten Ordnung, wenn man

$$p - P = 0, \ q - Q = 0, \ r - R = 0,$$

hätte; und überhaupt von der durch die Anzahl der in dem Ausdruck von $k - K$ verschwindenden Coefficienten angezeigten Ordnung.

Für einen jeglichen Punkt der Curve (V) sind die Coefficienten

$$P = \frac{dy'}{dx'}, \quad Q = \frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad R = \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{d^3y'}{dx'^3} \ldots$$

durch x, durch y, und durch die beständigen Größen, welche in ihre Gleichung hineinkommen, gegebene Functionen; aber bey den Punct M verwandelt sich x und y in x' und y', und da die Coefficienten

$$p = \frac{dy'}{dx'}, \quad q = \frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad r = \frac{1}{1 \cdot 3}\frac{d^3y'}{dx'^3}, \ldots$$

Functionen von x' und y' sind, so enthalten die Gleichungen

$$p - P = 0, \quad q - Q = 0, \ \text{u. s. w.}$$

nur

nur die beständigen Größen von welchen man so eben gesprochen hat, und die Coordinaten des Punctes M, und können folglich nur alsdann identisch werden, wenn diese beständigen Größen, mit den Coordinaten x' und y' die von ihnen ausgedrückte Relationen haben.

Wenn die Curve (V) nicht ganz unbestimmt ist, sey es in ihrer Lage, oder in ihrer Art, so wird alsdann ihre Gleichung willkührliche beständige Größen enthalten, worüber man disponiren könnte, um einige von diesen Gleichungen

$$p - P = 0, \quad q - Q = 0, \ldots$$

Gnüge zu thun, und dadurch eine Berührung einer mehr oder weniger höhern Ordnung, nach der Anzahl dieser beständigen Größen zu bestimmen.

260.

Um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir annehmen daß die Curve (V) ein Kreis sey von welchen die Lage des Mittelpuncts und Größe des Halbmesser beliebig ist; und wollen die verschiedene Berührungen aufsuchen, den dieser Kreis mit der gegebenen Curve haben kan, und auf welche Art die in seiner Gleichung hineinkommenden beständigen Größen durch die Natur der Berührung, und durch die Lage des Puncts wo diese Berührung statt hat, bestimmt sind.

Laßt uns daher durch α und β die Coordinaten des Mittelpuncts des von uns betrachteten Kreises, durch a sein Halbmesser, und durch x und y die Coordinaten irgend eines Punctes seines Umfangs, vorstellen; die Entfernung dieses letztern vom Mittelpuncte, wird zum Ausdruck haben (Nr. 197)

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

und,

und, der Natur des Kreises gemäß, sollte diese Entfernung gleich den Halbmesser a seyn, nimmt man die Quadrate, so wird man haben

$$(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2 = a^2:$$

dieses ist die Gleichung eines mit einem beliebigen Halbmesser beschriebenen Kreise der in Beziehung der Axen eine ganz beliebige Lage hat.

Die erste Bedingung, welche diesen Kreis erfüllen muß, ehe er die vorgegebene Curve berührt, ist daß er durch den Punct M geht, und deswegen muß seiner Gleichung gnüge geleistet werden, wenn man anstatt x und y, x′ und y′ setzt, welches geben wird

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = a^2 \ldots (1).$$

Weil man die veränderlichen Größen x′ und y′ für den Punct M welchen man betrachtet als bestimmt ansehen soll, so folgt daraus, daß von drey willkührliche beständige Größen α, β und a, nur noch zwey übrig bleiben mit welchen man disponiren kann um die Bedingungen der Berührung zu erfüllen, und daß folglich dieser Kreis im allgemeinen, mit der gegebenen Curve keine Berührung von einer höhern als die der zweyten Ordnung haben kann.

Die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2$$

giebt

$$P = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x - \alpha)}{y - \beta},$$

verändert man in diesen Werth x in x′ und y in y′ und substituirt solche in p − P = 0, so kommt

$$\frac{dy'}{dx'} + \frac{x' - \alpha}{y' - \beta} = 0, \text{ oder}$$

$$(y - \beta)\frac{dy'}{dx'} + (x' - \alpha) = 0 \ldots (2).$$

Diese

Diese Gleichung ist nicht hinlänglich um α und β zu bestimmen, sie giebt aber die Relation die zwischen diesen Größen existiren muß, für jeden der particulären Werthe von x' und von y': giebt man sie die Gestalt

$$\beta - y' = -\frac{dx'}{dy'}(\alpha - x'),$$

so wird man sehen, daß sie dieselbe ist, als die von der Normale in welcher man x in α und y in β (Nr. 245) verändert hätte, und man wird daraus schließen, daß alle Kreise die ihren Mittelpunct auf die Normale im Puncte M haben, und die durch diesen Punct gehen, eine Berührung von der ersten Ordnung mit der vorgegebenen Curve haben.

261.

Laßt uns noch die Gleichung $q - Q = 0$ bilden um die Bestimmung des berührenden Kreis zu vollenden. Wir ziehen sogleich aus der Gleichung dieses Kreises

$$Q = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2}{2(y-\beta)^3}$$

setzt man nachgehends x' für x und y' für y, so werden wir haben

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2}{2(y'-\beta)^3}, \text{ oder}$$

$$(y'-\beta)^3\frac{d^2y'}{dx'^2} + (y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = 0 \ldots (3)$$

die Gleichungen (1), (2) und (3) vereiniget, sind in hinlänglicher Anzahl um α, β und a zu bestimmen: die zweyte giebt

$$(x'-\alpha) = -(y'-\beta)\frac{dy'}{px'};$$

sub

substituirt man diesen Werth in der dritten Gleichung, so findet man

$$y' - \beta = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \text{ woraus}$$

$$x' - \alpha = \frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}};$$

und durch Hülfe dieser Ausdrücke, wird die Gleichung (1) geben

$$a = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

Die zwey ersten Resultate lehren, in Beziehung auf den Punct M, die Lage vom Mittelpunct des Kreises kennen, der in diesem Puncte eine Berührung von der zweyten Ordnung, mit der vorgegebenen Curve hat.

262.

Zwischen diesen Kreis und dieser Curve, kann kein anderer Kreis durchgehen; denn, wegen

$$p = P \text{ und } q = Q,$$

hat man

$$k - K = (r - R)h^3 + (s - S)h^4 + \ldots$$

und für ein Kreis der nur eine Berührung von der ersten Ordnung hätte, würde kommen

$$k - K_{,} = (q - Q_{,})h^2 + (r - R_{,})h^3 + (s - S_{,})h^4 + \ldots$$

Raisonnirt man hier wie in Nr. 258, so wird man sehen, daß die Differenz $k - K_{,}$ immer größer als $k - K$, seyn

w.rd

wird, so lange man h dem gemäß nehmen wird, und also kann der zweyte Kreis sich nicht unmittelbar vor und nach der Berührung, zwischen den ersten und der vorgegebenen Curve befinden: dieser erste Kreis wäre also der Berührungskreis.

Man sieht durch die Form des Ausdrucks von $k - K$, daß der Berührungskreis, so wie auch die Berührungsparabel (Nr. 258), nach der Berührung auf diejenige Seite der Curve übergehet, welche der Seite entgegengesetzt ist, wo er sich zuerst befand, wenn nicht die Werthe von x' und von y' die dem Punct M insbesondere zugehören, $r - R$ verschwinden lassen. In diesem Falle, wäre die Berührung des Berührungskreises und der vorgegebenen Curve von der dritten Ordnung; sie würde von der vierten werden, wenn $s - S$ zugleicher Zeit verschwände, und so fort.

Sieht man den Punct M als unbestimt an, so könnte man ihm im allgemeinen eine Lage ertheilen, so, daß man $r - R = 0$ hätte; dazu müßte man x' und y' bestimmen, indem man diese Gleichung mit die der Curve combinirt, und wenn man daraus für diese unbekannten Größen reele Werthe findet, so würde der Berührungskreis in den Punct welchen sie anzeigen eine Berührung von der dritten Ordnung haben.

263.

Da die Lage von dem Mittelpuncte des Berührungskreises für jeden der Puncte von der vorgegebenen Curve verschieden ist, so wird das Ensembel aller dieser Puncte eine Curve bilden, deren Coordinaten α und β sind. Ihre Gleichung findet sich, wenn man x' und y' zwischen den Glei-

Gleichungen (1) und (2) und denn der vorgegebenen Curve eliminirt; denn da die Relation, welche man durch diese Operation in α und β erhält, unabhängig von den particulären Werthen von x' und von y' ist, so muß diese Relation nothwendig allen diejenigen zukommen die α und β nehmen können.*)

264.

Es ist wichtig zu bemerken, daß der durch den Berührungspunct geführte berührungshalbmesser, immer die so eben erwähnte Curve berührt. Um es zu beweisen, so wollen wir in der Gleichung (2) den Werth von $x' - \alpha$ nehmen und diesen in der Gleichung (3) substituiren, diese letztere wird

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0;$$

wir könnten also statt die Gleichungen (2) und (3), die zwey folgenden anwenden

$$(x' - \alpha)dx' + (y' - \beta)dy' = 0$$

$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)d^2y' = 0.$$

Jetzt, wenn man die erste in Beziehung auf x' differentiirt, so wird sich nicht nur allein y' sondern auch α und β verändern,

*) Ich ergreife diese Gelegenheit um bemerken zu lassen, daß im allgemeinen die Eliminirung, wenn sie gewisse Größen verschwinden läßt, und dadurch die andern von den particulären Werthen, welche die erstern haben können, unabhängig macht, zu ein Resultat führt, welches collective alle die Werthe enthält, welchen man für jeden dieser Werthe gehabt hätte: durch diese Eigenschaft spielt die Eliminirung in den Fragen der Analysis und der Geometrie eine große Rolle, wie man solches in der Folge sehen wird.

ändern, weil es implicite Functionen von x' sind, und man wird folglich finden

$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)d^2y' - d\alpha\, dx' - d\beta\, dy = 0,$$

ein Resultat, welches in Beziehung auf der hier oben angeführten zweyten Gleichung, sich auf

$$d\alpha\, dx' + d\beta\, dy' = 0,$$

reducirt, woraus

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx'}{dy'}.$$

Bemerkt man aber, daß $\frac{d\beta}{d\alpha}$ auch den Differentialcoefficienten der veränderlichen Größe β, als eine Function von α (Nr. 68) betrachtet, ausdrückt, so wird man sehen, daß die Tangente der Curve, auf welcher sich der Mittelpunct des Berührungskreises befindet, mit der Abscissenaxe denselben Winkel bildet, als die Normale der vorgelegten Curve, und weil eine und die andre dieser graden Linien, durch den Mittelpunct des Berührungskreises gehen, so fallen sie nothwendig in einander.

265.

Dieses führt, uns von der Art, wie die vorgegebene Curve MX (Fig. 30) durch die Curve FZ erzeugt werden kann, zu reden, welche man als den Ort aller Mittelpuncte von allen Berührungskreisen der erstern Curve annimmt

Da die Linie MF Tangente von die Curve FZ ist, so hat sie nothwendig dieselbe Richtung als diejenige ist, welche ein um die Convexität dieser Curve gelegter Faden nehmen würde, wenn man bey der Entwickelung, ihm, vom Punct F hätte losmachen können; und es ist leicht zu sehen, daß, indem man diesen Faden eine schickliche Länge giebt, das äußerste Ende, bey welchen er sich zu entwickeln

anfängt, die Curve NX beschreibt. Dieses Verfahren hat eine große Analogie mit der Beschreibung des Kreises; es ist die Curve FZ, welche die Stelle des Mittelpuncts vertritt, und der Halbmesser MF statt beständig zu seyn, verändert sich für jedem Punct. Die Curve FZ heißt, die Abgewickelte (Evolute) die Curve MX, die Developirte, und der Halbmesser des Berührungskreises heißt, Halbmesser der Evolute

266.

Von alle den Kreisen, welche die vorgegebene Curve in dem Punct M berühren, und wo der Berührungskreis der ist, welcher sich ihr am mehrsten nähert, es sey vor, oder nach der Berührung, und folglich diejenige ist, deren Krümmung am wenigsten von der, welche diese Curve in den Punct hat, den wir betrachten, unterschieden ist. Die Krümmung des Kreises ist für alle ihre Puncte gleich aber die, eines kleinen Kreises ist beträchtlicher als die, eines großen, so daß die Krümmungen der Kreise in umgekehrtem Verhältnisse ihrer Halbmesser sind. Man kann also durch den Halbmesser des Berührungskreises, von der Krümmung einer gegebenen Curve, in irgend einem ihrer Puncte urtheilen; denn in diesem Falle vergleicht man die Curve mit ihrem Berührungskreise, so wie man sie mit ihrer Tangente vergleicht, um die Richtung zu kennen, gegen welche in jedem Augenblick der Punct, durch welchen sie beschrieben wird, hinzieht. Diese Betrachtungen haben auch den Halbmesser des Berührungskreises, den Nahmen Krümmungshalbmesser gegeben, und man sieht aus dem was vorhergeht, daß die Krümmung einer Curve in umgekehrten Verhältniß ihres Krümmungshalbmesser steht.

Die

Die Veränderungen des Halbmesser der Krümmungen und die Umstände des Laufs der Abgewickelten, sind auch sehr geschickt die singulären Puncte der vorgelegten Curve zu entdecken.

Der Ausdruck des Krümmungshalbmesser wird unendlich, wenn $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$ verschwindet, und Null, wenn er unendlich ist.

Man wird den Punct der vorgelegten Curve in welchen der Krümmungshalbmesser ein Maximum oder ein Minimum ist, finden, indem man, nach der gewöhnlichen Regel diesen Halbmesser wie es seyn muß, als eine Function von x' betrachtet, und seinen Differentialcoefficienten gleich Null macht. Diesen Calcul bey dem allgemeinen Ausdruck ausgeführt; führt auf einen merkwürdigen Schluß; denn es gehet daraus hervor, daß der Berührungskreis in diesem Falle eine Berührung von der dritten Ordnung mit der vorgegebenen Curve hat. In Wahrheit, wenn der Zähler von dem Differentiale des Werthes von a (Nr. 261) gleich Null gesetzt ist, so bekommen wir die Gleichung

$$3\,\frac{dy'}{dx'}\,\frac{d^2y'^2}{dx'^4} - \left(1 + \frac{dy'^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y'}{dx'^3} = 0,$$

welche x' bestimmen wird; wenn man aber auf der andern Seite das dritte Differential der Gleichung des Berührungskreises (Nr. 260) nimmt, so wird man haben

$$3\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + (y - \beta)\,\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Wenn man für $y - \beta$ ihrem aus dem zweyten Differential gezogenen Werth setzt, und x in x' und y in y' verwandelt, um das Resultat welches dem Berührungspunct gehört, zu bekommen, so wird dieselbe Gleichung als die

 hier

hier oben angeführte, kommen. Es folgt daraus daß der Coefficient $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ für die vorgelegte Curve und für den Berührungskreis derselbe ist, wenn der Halbmesser dieses letztern ein Maximum oder ein Minimum ist; und wegen

$$r = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3y'}{dx'^3} \text{ und } R = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3},$$

wird man alsdann $r - R = 0$ haben, ein Resultat welches die Bedingung in Beziehung einer Berührung von der dritten Ordnung (Nr. 259) ausdrückt.

Da der Mittelpunct der Krümmung sich immer in den Raum befindet gegen welchen die vorgelegte Curve ihre Concavität kehrt, so folgt daraus, daß nach einem Inflexions- oder Rückkehrpunct, dieser Mittelpunct von einer Seite der Tangente zur andern übergeht, so wie die Abgewickelte. Ich werde mich nicht aufhalten, die verschiedene Gestalten, welche die Abgewickelte annehmen kann en Detail zu zeigen, ich werde nur bloß bemerken, daß, wenn sie eine Inflexion erleidet, daraus ein Rückkehrpunct von der zweyten Art in der vorgegebenen Curve entstehet; dieses ist in der Figur sichtbar; denn der Krümmungshalbmesser MF, der in NG gelangt ist, kehrt sogleich wieder in HO zurück, und beschreibt den punctirten Zweig NO. Auf diese Art erkannte L'hopital, das Daseyn dieser Art von Rückkehrpuncte, welches nachher von De Gua behauptet, aber erst durch d'Alembert und Euler außer Zweifel gesetzt würde.

267.

Ich werde mich nicht viel über die Anwendung, der in den vorhergehenden Artikeln, enthaltenen Resultate,

aus-

ausbreiten, weil diese Anwendung keine Schwierigkeit hat, wenn man den Mechanismus der Differentialrechnung gut inne hat.

Es sey zuerst die durch die Gleichung $y'^2 = Ax'$, gegebene Parabel. Man wird haben

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A}{2y'}; \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{4y'^2 + A^2}{4y'^2},$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{A}{2y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx'} = -\frac{A^2}{4y'^3}.$$

Setzt man diese Werthe in den Formuln von Nr. 261, so wird man finden

$$a = -\frac{4y'^3}{A^2} \cdot \left(\frac{4y'^2 + A^2}{4y'^2}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{(4y'^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}}{2A^2}$$

$$= \frac{(4Ax' + A^2)^{\frac{3}{2}}}{2A^2}$$

$$y' - \beta = \frac{4y'^3}{A^2} \cdot \frac{(4y'^2 + A^2)}{4y'^2} = \frac{4y'^3}{A^2} + y'$$

$$x' - \alpha = -\frac{A}{2y'} \cdot \frac{4y'^3}{A^2} \cdot \frac{(4y'^2 + A^2)}{4y'^2} = -\frac{4y'^2 + A^2}{2A}$$

$$= -2x - \tfrac{1}{2}A.$$

Das erste Resultat, welches den Werth des Krümmungshalbmesser ausdrückt, wird für $x' = 0$, gleich $\frac{1}{2}A$, dieses lehrt uns, daß die Krümmung der Parabel bey ihrem Scheitel dieselbe ist, als die eines Kreises, welcher mit einem den halben Parameter gleichen Radius beschrieben ist, und daß dieser Kreis eine Berührung der vierten Ordnung mit der Parabel hat, weil sein Radius ein Minimum ist. Da der Radius des Berührungskreises größer wird, nach Maaßgabe, als x' zunimmt, so nimmt zu gleicher Zeit die Krümmung der Parabel ab und strebt unaufhörlich sich zu vernichten. Nähert man den Werth von a denjenigen, den man in Nr. 245 für die Nor-

 male

male gefunden hat, so wird man sehen daß $a = \frac{MR^3}{\frac{1}{4}A^2}$, oder daß der Krümmungshalbmesser gleich ist den Cubus der Normale durch das Quadrat des halben Parameter dividirt.

Die Ausdrücke von $y' - \beta$ und $x' - \alpha$ geben

$$-\beta = \frac{4y'^3}{A^2}, \qquad \alpha = 3x' + \tfrac{1}{2}A,$$

woraus man ziehet

$$y' = -(\tfrac{1}{4}A^2\beta)^{\frac{1}{3}} \text{ und } x' = \frac{\alpha - \frac{1}{2}A}{3}:$$

setzt man diese Werthe in der Gleichung

$$y'^2 = Ax',$$

so wird man haben

$$(\tfrac{1}{4}A^2\beta)^{\frac{2}{3}} = \frac{A(\alpha - \frac{1}{2}A)}{3},$$

eine Gleichung welche der Abgewickelten von der Parabel zugehört. Wenn man darinn

$$\alpha - \tfrac{1}{2}A = \gamma$$

macht, oder man den Ursprung der Abscissen in D,(Fig.31) bringt, so wird man ihr diese sehr einfache Gestalt geben können,

$$\beta = \frac{16\gamma^3}{27A},$$

die uns zeigt, daß die Curve welche sie vorstellt, eine von den Parabeln der dritten Ordnung ist, die aus zwey Zweige DF und Df bestehen, von welchen der erste durch seine Entwickelung den Zweig AX, der gemeinen Parabel XAx, und der zweyte den Zweig Ax hervorbringt.

Wir wollen noch den Ausdruck des Krümmungshalbmesser von den Curven der zweyten Ordnung die in der Gleichung

$y'^2 =$

$$y'^2 = Ax'^2 + 2Bx',$$

begriffen sind, suchen, wir werden haben

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Ax' + B}{y'}, \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{y'^2 + (Ax' + B)^2}{y'^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{Ay' - (Ax' + B)\frac{dy'}{dx'}}{y'^2} = \frac{Ay'^2 - (Ax' + B)^2}{y'^3}.$$

Wenn man diese Werthe in den von a (Nr. 261) substituirt, so werden wir finden

$$a = \frac{(y'^2 + (Ax' + B)^2)^{\frac{3}{2}}}{Ay'^2 - (Ax' + B)^2},$$

oder wenn man statt y′ ihren Werth setzt,

$$a = -\frac{[(A + 1)Ax'^2 + (A + 1)2Bx' + B^2]^{\frac{3}{2}}}{B^2}.$$

268.

Man muß bemerken, daß für die Beschreibung der Parabel XAx, durch die Entwickelung der Curve FDf, der, um einen oder den andern der Zweige DF und Df gewickelte Faden, bey den Punct D, in die Verlängerung der Tangente BD, eine den Krümmungshalbmesser bey den Punct A, gleiche Länge AD haben muß, d. h. gleich der Hälfte des Parameters der vorgelegten Parabel. Jeder andre Punct (so wie F) auf diesen Faden genommen, würde eine unterschiedene Curve hervorbringen. Wenn der Punkt F auf den Punct D fiele, so würde alsdenn der Krümmungshalbmesser der beschriebenen Curve, bey ihrem Ursprung Null seyn und folglich würde sie bey diesem Punct eine unendliche Krümmung haben. Man sieht auch daß die Länge des Bogens DF gleich der Differenz ist, welche sich zwischen den correspondirenden Krümmungshalbmesser

MF und den Krümmungshalbmesser AD, welcher zu dem Ursprunge gehöret, befinden.

Diese Bemerkung ist allgemein, und welches auch die Developirte seyn mag, so wird ein beliebiger Bogen der Abgewickelten der Differenz der beyden Krümmungshalbmesser die durch ihre äußersten Enden geführt sind, gleich seyn. Es folgt daraus daß, weil man immer zu dem Ausdruck des Krümmungshalbmessers der algebraischen Curven, gelangen kann, so sind die Abgewickelten dieser Curven alle zu rectificiren, oder was einerley ist, daß die Länge ihrer Bogen durch eine algebraische Formel angegeben werden kann.

269.

Wenn wir voraussetzen, daß die Curve (V), welche die vorgegebene in den Punct M berühren soll, statt ein Kreis zu seyn wie in Nr. 260, eine Ellipse ist, deren Axen a und b unbestimmt, aber parallel mit der der Coordinaten sind, und daß α und β die Coordinaten ihres Mittelpuncts bezeichnen, so wird ihre Gleichung seyn,

$$a^2(x-\alpha)^2 + b^2(y-\beta)^2 = a^2b^2.$$

Indem man x in x′ und y in y′ verwandelt, um auszudrücken, daß sie durch den Punct M gehen muß, so wird man haben

$$a^2(x'-\alpha)^2 + b^2(y'-\beta)^2 = a^2b^2;$$

diese Gleichung wird noch drey der beständigen willkührlichen Größen unbestimmt lassen, mit welchen man wird disponiren können, um eine gleiche Anzahl Glieder in der Reihe

$$k-K = (p-P)h + (q-Q)h^2 + (r-R)h^3 + (s-S)h^4 + \ldots$$

verschwinden zu lassen, indem man die Gleichungen

$$p-P=0,\quad q-Q=0 \text{ und } r-R=0$$

setzt.

setzt. Die Berührungs-Ellipse durch diese Bestimmungen bestimmt, wird eine Berührung von der dritten Ordnung mit der vorgelegten Curve haben, und es ist evident, daß sie zwischen dieser Curve und ihren Berührungskreis gehen wird.

Ueberhaupt sey die Gleichung (V) welche sie wolle so wird man, indem man darinnen x in x′, und y in y′ verwandelt, diejenige Relation erhalten, welche unter ihren beständigen Größen statt haben muß, damit die Curven, welche sie vorstellet, durch die auf der vorgegebenen Curve genommenen Punct gehen, und wenn sie eine Zahl n von willkührlichen beständigen Größen enthält, so werden n — 1 übrig bleiben, womit man einer ähnlichen Anzahl von Berührungsbedingungen wird genugthun können. Weil man aber hat:

$$p = \frac{dy'}{dx'}, \quad q = \frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad r = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dx'^3} \ldots$$

$$P = \frac{dy}{dx}, \quad Q = \frac{1}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}, \quad R = \frac{1}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$$

so wird man diese Bedingungen folgendergestalt vorstellen können

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^3y'}{dx'^3} = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

indem man beobachtet, in der Entwickelung der zweyten Glieder dieser Gleichungen, welche aus den Differentiationen der Gleichung (V) abgeleitet sind, x in x′, und y in y′ zu verändern. Die Berührungscurve, welche aus der Bestimmung aller beständigen Größen entstehen wird, wird mit der vorgegebenen eine Berührung der Ordnung n — 1, und alle andern, welche in der allgemeinen Gleichung begriffen sind, woraus sie gezogen ist, können davon nur niedere Ordnungen haben; dieserhalb unterscheide

ich

ich den ersten unter den Nahmen der Berührung. Nach diesen Erklärungen ist die Tangente eine Berührungslinie, und ihre Berührung ist eine Berührung der ersten Ordnung; die Berührung des Berührungskreises ist eine Berührung der zweyten Ordnung; endlich hat die Berührungscurve deren allgemeine Gleichung n willkührliche beständige Größen enthält, eine Berührung von der Ordnung $n - 1$.

270.

Von den transcendenten Curven.

Wir haben bis jetzt bloß die algebraischen Curven betrachtet, wir werden nun aber einige der merkwürdigsten transcendenten Curven kennen lernen. Wir werden uns zuvörderst mit der logarithmischen, oder derjenigen Curve beschäftigen, in welcher die Ordinaten die Logarithmen der Abscissen sind.

Man hat in dieser Curve $y' = lx'$, und macht man $x' = 1$, so bekommt man $y' = 0$, woraus man siehet, daß sie die Axe AB im Puncte E begegnet (Fig. 32) wo die Abscisse AE gleich der Einheit ist. Der Zweig EX, welcher den positiven Abscissen, welche größer als die Einheit sind, entspricht, ist unendlich, weil die Logarithmen dieser Abscissen stets wachsen. In dem Theil AE wo die Abscissen Brüche sind, sind die Ordinaten negativ und nehmen in dem Maasse zu, wie die Brüche abnehmen, dergestalt, daß der Zweig Ex den negativen Theil Ac der Ordinatenaxe zur Asymptote hat: endlich erstreckt sich die logarithmische Curve nicht auf der Seite der negativen Abscissen, weil ihre Logarithmen imaginair sind (Nr. 183).

Dif-

Differentiirt man die Gleichung $y' = lx'$, so bekomt man $\frac{dy'}{dx'} = \frac{M}{x'}$ (Nr. 20); man sieht hieraus, daß die Tangente dieser Curve für $x' = 0$ auf die Abscissenlinie senkrecht ist, und daß dieselbe ihr nicht eher parallel ist, als wenn man voraussetzt, daß x' unendlich sey (Nr. 248). Der allgemeine Ausdruck der Subtangente (Nr. 240) giebt $PT = \frac{x'y'}{M}$; aber indem man y' wegschafte, so führt man den Logarithmen von x' ein, daher dieser Ausdruck transcendent ist; nimmt man indessen die Subtangente OD auf die Axe AC, so wird man das Resultat $OD = x' \frac{dy'}{dx'} = M$ bekommen, welches sehr merkwürdig ist, weil es uns belehrt, daß die Subtangente OD, für alle Puncte der Curve beständig und gleich dem Model ist. Desgleichen wird man finden, daß die Tangente, die Subnormale und Normale, in Beziehung auf die Axe AB genommen, transcendent sind, weil die Ordinate y' mit in ihren Ausdruck kommt, daß sie aber algebraisch werden, wenn man sie in Ansehung der Axe AC betrachtet.

Ich gehe zur Untersuchung des Krümmungshalbmesser über, man hat

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{x'^2 + M^2}{x'^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{M}{x'^2},$$

hieraus (Nr. 261)

$$a = \frac{(x'^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx'},$$

$$y' - \beta = \frac{(x'^2 + M^2)}{M},$$

$$x' - \alpha = -\frac{(x'^2 + M)}{x'}.$$

Ich

Ich werde mich nicht dabey aufhalten die abgewickelte Curve zu betrachten, welche nothwendig transcendent seyn würde: ich merke bloß an, daß man die Differentialgleichung dieser Curve erhalten kann, wenn man vermittelst der Werthe von $y' - \beta$, und $x' - \alpha$ und ihrer Differentialien x', dx' und dy', aus der Gleichung

$$dy' = M \frac{dx'}{x'}$$

eliminirt.

Die Logarithmen differiren unter sich nach Verhältniß des Models in Beziehung des System der Logarithmen, welches sie vorstellen. Die Gleichung $x' = A^{y'}$ giebt, indem man die Neperschen Logarithmen nimmt,

$$l' x' = y' l' A,$$

woraus

$$y' = \frac{l' x'}{l' A'}$$

ein Resultat dessen zweytes Glied nichts anders ist, als der Logarithme von x', für einen Model gleich $\frac{1}{l' A}$ berechnet. Diese Gleichung gehört also zu einer logarithmischen Curve.

271.

Die Cycloide, welche wie bekannt die Curve ist, die durch einen auf dem Umfange eines Kreises genommenen Punct beschrieben wird, während dieser Kreis auf einer der Lage nach gegebenen graden Linie rollt, ist noch eine transcendente Curve; die Relation unter ihren Ordinaten und ihren Abscissen hängt von den Bogen des beschreibenden Kreises ab; man kann sie so ausdrücken.

Da der Ursprung der Bewegung des Kreises willkührlich ist, so nehme ich denselben im Puncte A (Fig. 33) an,

an, wo der beschreibende Punct M sich auf der graden Linie AB befand, welche von dem beschreibenden Kreise durchlaufen ist. Weil dieser Kreis indem er fortrollt mit allen Punkten seines Umfangs successive die grade Linie berührt, so ist einleuchtend, daß, sobald er in irgend eine Lage QMG gekommen ist, die Entfernung AQ gleich dem Bogen MQ ist, welcher zwischen dem Punct M den die grade Linie in A berührte, und dem Punct Q, der sie in der gegenwärtigen Lage berührt, begriffen ist. Stellen wir diesen Bogen durch t vor, und errichten auf AB durch den Punct Q, die Perpendiculare QO, welche durch den Mittelpunct des beschreibenden Kreises gehen wird, und ziehe MN || AB so wird MN der Sinus von MQ und NQ wird der Sinusversus davon seyn. Wenn wir durch r den Radius QO bezeichnen, so werden wir, indem wir die Tafel Sinus und Cosinus nehmen;

$$MN = r \sin \frac{t}{r}, \quad QN = r - r \cos \frac{t}{r}$$

bekommen; aber

$$AP = x' = AQ - MN \text{ und } PM = y' = QN,$$

also

$$x' = t - r \sin \frac{t}{r} \quad \ldots (1)$$

$$y' = r - r \cos \frac{t}{r} \quad \ldots (2)$$

Um die Relation zwischen x' und y', zu erhalten, müßte man t aus diesen zwey Gleichungen eliminiren, welches doch nur zu einer Relation zwischen einem Bogen und seinem Sinus, also zu einem transcendenten Resultate führen würde; allein man kann wie wir sogleich sehen werden, zu einer Differentialgleichung, zwischen den Coordinaten x' und y', gelangen. Nachdem die Gleichung (1) und

und (2) differentiirt sind, so geben sie

$$dx' = dt - dt \cos\frac{t}{r}, \qquad dy' = dt \sin\frac{t}{r};$$

man zieht hieraus

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{1 - \cos\frac{t}{r}}{\sin\frac{t}{r}}.$$

und setzt man statt

$$1 - \cos\frac{t}{r},$$

seinen Werth $\frac{y'}{r}$, aus der Gleichung (2) genommen, so bekommt man

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{r \sin\frac{t}{r}},$$

ein Resultat welches

$$\sin\frac{t}{r} = \frac{y'}{r}\,\frac{dy'}{dx'}$$

geben wird; aber man leitet zugleich aus der Gleichung (2) ab,

$$\cos\frac{t}{r} = \frac{r - y'}{r}:$$

wenn man diese Ausdrücke in der Gleichung

$$\sin t^2 + \cos t^2 = 1,$$

substituirt, so wird man finden

$$\frac{y'^2}{r^2}\,\frac{dy'^2}{dx'^2} + \frac{(r - y')^2}{r^2} = 1.$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Cycloide nimmt man den Werth des Differentialcoefficienten $\frac{dx'}{dy'}$, so bekommt

kommt man

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2ry' - y'^2}}.$$

272.

Nichts ist jetzt leichter als die Ausdrücke der Subtangente und der Tangente, der Subnormale und der Normale, in der Cycloide zu erhalten. Man findet vermittelst der allgemeinen Formeln aus Nr. 240, 244 und 245,

$$PT = \frac{y'^2}{\sqrt{2ry - y'^2}}, \qquad MT = \frac{y'\sqrt{2ry'}}{\sqrt{2ry' - y'^2}}$$

$$PR = \sqrt{2ry' - y'^2}, \quad MR = \sqrt{2ry'}.$$

Man kann diese Werthe auf eine sehr einfache Art construiren; denn man wird leicht bemerken können, daß da MP oder y' als die Absciſſe QN in dem beschreibenden Kreis QMG betrachtet ist, so wird der oben angegebene Werth für PR gerade derjenige der Ordinate MN dieses Kreises seyn, und daß folglich die Normale mit der Sehne des Bogens MQ zusammenfällt, wie man es auch durch den Ausdruck von MR sehen kann; es folgt hieraus, daß die Tangente MT die Verlängerung der Sehne MG seyn wird. Wenn man sich einbildet, daß der Kreis QMG auf dem Punct Q bis in irgend eine Lage qmg, sich fortbewegt, so werden die Linien mq und mg, ohngeachtet dieser Veränderung den Linien MQ und MG parallel bleiben; es wird also hinreichend seyn, um die Tangente und die Normale in einem gegebenen Punct M zu construiren, diesen Punct auf den fixem Kreis qmg zu beziehen, welches geschieht, indem man die grad Linie

Mm

Mm parallel mit AB, und alsdenn MT parallel mit mg, und MQ parallel mit mq zieht.

Um den Krümmungshalbmesser und, die Gleichung der Abgewickelten zu bestimmen, muß man zur Gleichung

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2ry' - y'^2}},$$

ihre Differentialgleichung hinzufügen, und bemerke, daß man einfacher zu dem Resultat gelangen wird, wenn man x' als eine Function von y' ansieht, d. h. wenn man dy' beständig macht. Es ist leicht einzusehen, daß man in dieser Hypothese x' in y' und umgekehrt in den Formeln von Nr. 261 verwandeln muß. Ich werde indessen diesen Weg nicht einschlagen, weil ich zeigen will, wie man alle Affectionen der Curve bestimmen kann, wenn man sich unmittelbar der gegebenen Relationen zwischen x' und t, y' und t bedient.

273.

Wenn man fortfahren wollte, in den Formeln von Nr. 261, dx' als eine beständige Größe anzusehen, so müßte man alsdenn y' und t, zu gleicher Zeit als veränderlich voraussetzen, weil diese beyden letztern Größen implicite Functionen der erstern sind, allein es wird bequemer seyn x' und y' als implicite Functionen von t zu betrachten, oder welches das nemliche ist, dt als eine beständige Größe zu supponiren, und auf einmal dx' und dy' (Nr. 68) variiren zu lassen, indem man acht hat, statt des Differentialcoefficienten $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, seinen Ausdruck in dieser Hypothese (Nr. 59) zu setzen, und man wird haben:

a =

$$a = \frac{(dx'^2 + dy'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'},$$

$$y' - \beta = - \frac{dx'(dx'^2 + dy'^2)}{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'},$$

$$x' - \alpha = \frac{dy'(dx'^2 + dy'^2)}{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'}.$$

Dieses festgesetzt, werden die Gleichungen (1) und (2) geben

$$dx' = dt - dt \cos\frac{t}{r}, \qquad d^2x' = \frac{dt^2}{r} \sin\frac{t}{r},$$

$$dy' = dt \sin\frac{t}{r}, \qquad d^2y' = \frac{dt^2}{r} \cos\frac{t}{r},$$

woraus man zieht

$$dx'^2 + dy'^2 = 2dt^2 \left(1 - \cos\frac{t}{r}\right),$$

$$dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x' = - \frac{dt^3}{r}\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die Werthe von a, von $y' - \beta$ und von $x' - \alpha$ und beobachtet daß

$$1 - \cos\frac{t}{r} = \frac{y'}{r},$$

so wird man finden

$$a = 2^{\frac{3}{2}} r \left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ry'}$$

$$\left.\begin{array}{l} y' - \beta = 2r\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right) = 2y' \\ x' - \alpha = -2r \sin\frac{t}{r}; \end{array}\right\} \text{woraus folgt} \left\{\begin{array}{l} \beta = -y' \\ \alpha = t + r\sin\frac{t}{r}. \end{array}\right.$$

Das erste dieser Resultate zeigt uns, daß der Krümmungshalbmesser MM' das Doppelte der Normale MQ ist, und daß er folglich nicht größer werden kann als das Zwiefache von dem Durchmesser des beschreibenden Kreises,

ein Durchmesser, welcher zugleich Ordinate und die Normale der Cycloide im Puncte I ist, wo die Berührung Q die Hälfte des Umfang durchlaufen hat, es würde leicht eyn hieraus zu schließen, wie die beyden letzten Resultate es geben, daß

$$EM' = \beta = - y'$$

und daß

$$EP = x' - \alpha = 2 PQ = - 2 r \sin \frac{t}{r}.$$

Wir werden aus dem Vorhergehenden diese merkwürdige Folgerung ziehen, daß die abgewickelte der Cycloide eine andere der ersten gleichen Cycloide, aber in einer umgekehrten Lage ist. In der That, wenn man A'B' parallel mit AB, bis zu einer Entfernung A'I gleich dem Durchmesser des beschreibenden Kreises fortführt, und man den Punct A' zum Ursprung der Coordinaten nimmt

$$AI = \pi, \quad EI = X \text{ und } P'M' = Y$$

macht, so wird man bekommen

$$EI = AI - AE = \pi - \alpha = \pi - t - r \sin \frac{t}{r}.$$

$$P'M' = EP' - EM' = 2r - \beta = r + r \cos \frac{t}{r},$$

Aber indem man betrachtet, daß

$$\sin \frac{t}{r} = \sin \left(\frac{\pi - t}{r}\right),$$

und daß

$$\cos \frac{t}{r} = - \cos \left(\frac{\pi - t}{r}\right)$$

wird, so wird man daraus schließen, daß

$$X = (\pi - t) - r \sin \left(\frac{\pi - t}{r}\right) \text{ und } Y = r - r \cos \left(\frac{\pi - t}{r}\right).$$

Da diese Werthe mit dem Bogen $\pi - t$, zusammengesetzt sind,

sind, wie die von x' und von y' es mit dem Bogen t, sind, so sind X und Y also nichts anders, als die Coordinaten einer Cycloide, welche durch denselben beschreibenden Kreis als die erste, beschrieben ist.

Dieselbe Folgerung würde sich ebenfalls durch geometrische Betrachtungen ziehen lassen, wenn man zu der Kenntniß des Krümmungshalbmessers gelangt ist. Indem man die grade Linie GQ verlängert, bis sie A′B′ in Q′ begegnet, und Q′M′ zieht, so wird man die Dreyecke GMQ, und QM′Q′ formiren, welche unter einander gleich sind; der Winkel QM′Q′, wird also ein rechter seyn, und wenn man auf QQ′ als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so wird er durch den Punct M′ gehen und dem beschreibenden Kreise gleich seyn. Dieses festgesetzt wird man, weil der Bogen M′Q′ das Complement von M′Q ist, welcher selbst gleich MQ ist, bekommen:

$$M'Q' = QMG - MQ = AI - AQ = QI = A'Q',$$

welches ganz deutlich zeigt, daß die Abgewickelte A′M′A, eine Cycloide ist, welche durch den Kreis Q′M′Q, indem er auf A′B′ von A′ nach B′ rollt, beschrieben wird.

Man wird ohne Zweifel bemerken, daß nach dem Vorhergehenden die Cycloide rectificirbar ist, weil sie selbst ihre Abgewickelte ist, und daß der Ausdruck ihres Krümmungshalbmessers algebraisch ist, und man wird hieraus, dieses wissenswürdige Resultat ableiten können, daß die Länge des Bogens A′A, oder von dem ihm gleichen AK, welcher die Hälfte des durch eine gänzliche Umwälzung des beschreibenden Kreises, beschriebenen Zweige ausmacht, ganz genau dieselbe ist, als die von A′K oder von dem zwiefachen Durchmesser dieses Kreises.

274.

Die Cycloide ist nicht beym Puncte L beendigt, wo der Kreis auf der graden Linie AL seine ganze Peripherie durchlaufen hat, den nichts begrenzt die Dauer dieser Bewegung. Man muß wohl in der Beschreibung der Curven bemerken, daß die verschiedenen aus einer und derselben Construction oder derselben Bewegung resultirenden verschiedenen Theile, alle zu derselben Curve gehören. Also beschreibt der Kreis QMG, indem er fortfährt auf der graden Linie AB über dem Punct L hinaus zu rollen, eine unendliche Reihe der AKL ähnliche Theile und man muß eben soviel davon zur Linken des Puncts A annehmen, weil der Kreis nur durch eine seit einer unbegränzten Zeit angefangenen Bewegung zu diesem Puncte gelangen konnte. Die Gleichungen (1) und (2) führen selbst zu diesen Bemerkungen, denn nichts verhindert darinnen t so groß, als man will anzunehmen, es sey positiv oder negativ. Man sieht überdem, daß y nie größer seyn kann als 2r, weil ihr Ausdruck nur den Cosinus von $\frac{t}{r}$ enthält, welcher nothwendig zwischen den Grenzen o und 1 begriffen ist. Es folgt hieraus daß die Cycloide in der ganzen Ausdehnung gedacht, welche sie haben soll, durch eine und dieselbe grade Linie in einer unendlichen Menge von Puncten durchschnitten werden kann. Es ist also nicht zu bewundern, daß man für sie keine endliche algebraische Gleichung hat, die, sie sey von welchem Grade sie wolle, doch nie diesen Umstand ausdrücken würde.

Der Differentialcoefficient der zweyten Ordnung in Beziehung auf die Function y, hat zum Ausdruck, indem

dem man dx' und dy' als veränderlich ansieht,

$$\frac{dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x'}{dx'^3}, \text{ (Nr. 59);}$$

sein Werth

$$-\frac{1}{r\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)}$$

in der Cycloide, ist stets negativ, weil $\cos\frac{t}{r}$ nie größer seyn kann als die Einheit; aber er wird unendlich, wenn der Bogen $\frac{t}{r}$ = Null ist, oder irgend einem Vielfachen des Umfangs: in denselben Fällen ist

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\sin\frac{t}{r}}{1 - \cos\frac{t}{r}}$$

auch unendlich: die Puncte A, L, u. s. w. wo sich die verschiedenen Zweige der Cycloide berühren, sind also Rückkehrpuncte der ersten Art, in welchen die Tangente senkrecht auf die Abscissenaxe ist.

275.

Die Spiralen machen noch eine Ordnung von transcendenten Curven aus, welche sowohl durch ihre Form als durch ihre Eigenschaften merkwürdig sind. Man sehe hier, wie sich diejenige, welche Conon von Syracus erdachte, erzeugt, und von welcher Archimedes die vornehmsten Eigenschaften entdeckte.

Während der Halbmesser AO (Fig. 34) sich um den Mittelpunct A des Kreises OQG bewegt, durchläuft ein beweglicher Punct welcher von diesem Mittelpuncte ausge-

gangen ist, die Linie AO gleichförmig und mit einer solchen Geschwindigkeit, daß er in dem Puncte O, zu derselben Zeit ankommt, da diese grade Linie ihre Umwälzung beendigt hat. Es folgt daraus, daß für irgend einen Punct M der Spirallinie AMOX, das Verhältniß von AM zu AN oder AO, dasselbe ist, als dasjenige des Bogens ON, zum Kreisumfang OGO; da aber nichts sich dem widersetzt, daß der beschreibende Punct seine Bewegung über den Punct O, auf den verlängerten Halbmesser fortsetzt, und daß dieser Halbmesser selbst eine unbegrenzte Anzahl von Umwälzungen machen kann, so wird die Curve AMO sich verlängern indem sie sich beständig um den Punct A dreht, dergestalt, daß das Verhältniß zwischen der Entfernung von jedem ihrer Puncte zum Puncte A und den Halbmesser des Kreises, demjenigen gleich sey, welches sich zwischen dem durch den Punct O durchlaufenen Bogen, seit dem Anfange der Bewegung und dem ganzen Kreisumfang befindet: in M' z. B., wo der Halbmesser AN eine Revolution plus dem Bogen ON gemacht hat, wird man haben

$$\frac{AM'}{AN} = \frac{OGO + ON}{OGO}.$$

Wenn man also ON = t, AM = u macht, und daß, indem man den Halbmesser AN zur Einheit nimmt, man durch 2π den Kreisumfang OGO vorstellt, so wird man

$$u = \frac{t}{2\pi} \text{ haben.}$$

Die veränderlichen Größen dieser Gleichung, sind das was die Geometer Polar Coordinaten nennen. Der Mittelpunct von A des Kreises OGO heisse der Pol; die Linie AM, welche gezwungen ist immer durch diesen Punct zu gehen, ist der Radiusvector und vertritt die Stelle der Or=

Ordinate der Curve, während der Bogen ON die Abscisse vertritt.

Die Spirallinie, welche wir eben betrachtet haben, und welche den Nahmen der Spirallinie des Archimedes führt, ist nur ein besonderer Fall der Curven, welche die Gleichung

$$u = At^n$$

vorstellen würde, indem man unter n alle mögliche Werthe versteht. Wenn man $n = -1$ macht, so hat man

$$u = At^{-1} \text{ oder } ut = A,$$

eine Gleichung welche zur hyperbolischen Spirallinie gehört. Wenn statt der Entfernung AM, man für u, den Theil MN des Radiusvector nähme, welcher zwischen den Punct M und dem Umfang des Kreises OGO begriffen ist, so wird die Gleichung

$$u^2 = At$$

die der parabolischen Spirale seyn, oder der Curve, welche man machen würde, indem man die Axe einer Parabel um einen Kreis rollte; die Ordinaten werden alsdann senkrecht auf dem Umfang dieses Kreises seyn und auf dessen Halbmesser fallen.

So lange n eine positive Zahl ist, nehmen die durch die Gleichung

$$u = At^n$$

gegebenen Spiralen ihren Ursprung im Punct A; aber wenn n negativ ist, so vermindert sich u, welches zuerst für $t = 0$ unendlich ist, nach dem Maaße wie dieser Bogen zunimmt, und bey jeder neuen Umwälzung nähert sich der beschreibende Punct, dem Puncte A, ohne ihm jemahls erreichen zu können.

Um auf den Spiralen, welche auf Polar-Coordinaten bezogen sind, die Ausdrücke der Subtangenten der Tan-

genten u.s.w. welche wir in Beziehung der rechtwinkligen Coordinaten gefunden haben, anwenden zu können, so wollen wir sogleich die Coordinaten des ersten Systems in die des 2ten verwandeln, und wir werden zeigen, wie man von einem zum andern übergehen kann. Dieses wird um desto nützlicher seyn, da man zuweilen die algebraischen Curven auf Polar-Coordinaten bezieht, man thut dies vorzüglich iu Absicht der Kegelschnitte, indem man ihren Brennpunct zum Pol nimmt.

276.

Wir wollen mehrerer Einfachheit halber den Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten beym Puncte A annehmen; es sey QO = m, der zwischen dem Puncte Q befindliche Bogen, der auf die Abscissenaxe AB und dem Puncte O, Ursprung des Bogens t, liegt. Indem man PM senkrecht auf AB setzt, und beobachtet, daß der Winkel MAP durch den Bogen NQ, welcher = t — m ist, gemessen wird, so werden wir bekommen:

$$AM^2 = AP^2 + PM^2, \quad AP = AM \cos NQ,$$

$$PM = AM \sin NQ, \text{ oder } u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x = u . \cos(t - m), \quad y = u . \sin(t - m).$$

Vermittelst der beyden letztern Werthe kann man jede algebraische Gleichung zwischen x und y in eine andere verwandeln, welche nichts weiter als den Sinus, den Cosinus des Bogens t und den Radiusvector u enthalten wird; sie geben auch:

$$\cos(t - m) = \frac{x}{u}, \quad \sin(t - m) = \frac{y}{u};$$

Man kann aus diesen Gleichungen Werthe vom $\cos t$, und von $\sin t$ in x, y, u, $\sin m$ und $\cos m$, ziehen, welche,

nach-

nachdem sie in irgend eine Gleichung zwischen u, sint und cost substituirt sind, zu ein Resultat führen werden, welches bloß noch x und y enthalten wird, weil man u durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ wird ersetzen können. Wenn man zur Abkürzung voraussetzt, daß die Linie AB mit der Linie AO zusammenfällt, so wird man bloß bekommen

$$\cos t = \frac{x}{u}, \qquad \sin t = \frac{y}{u}.$$

Wenn die Gleichung in u und t, welche man sich vornimmt zu transformiren, den Bogen t selbst enthält, so ist es nicht mehr möglich eine algebraischr Relation, zwischen x und y, weil man keinen ähnlichen zwischen den Bogen t, seinen Sinus und seinen Cosinus hat; aber man kommt wie wir sehen werden, zu einer Differentialgleichung, welche nichts weiter als x, y, dx und dy enthält.

Man ziehet aus den oben gefundenen Werthen, für u, x und y,

$$du = d.\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$dx = du.\cos(t - m) - u.dt.\sin(t - m)$$
$$dy = du.\sin(t - m) + u.dt.\cos(t - m)$$

und wenn man du und die zwey letzten Gleichungen, eliminirt, so wird kommen

$$dt = \frac{dy.\cos(t - m) - dx.\sin(t - m)}{u};$$

wenn man für

$\cos(t - m)$, $\sin(t - m)$ und u

ihre Werthe setzt, so hat man

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Man kann also aus der Gleichung in u und t, und aus ihrem Differentiale die Größen u, cost, sint, du und dt

wegbringen; und da die beyden Resultate, welche man erhalten wird, nur noch t enthalten werden, so wird man dieses durch die Eliminirung verschwinden lassen.

Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$u = At^n,$$

welches giebt

$$u^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{n}} t, \quad \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} . du = A^{\frac{1}{n}} . dt;$$

da die Ausdrücke von u, von du und von dt, unabhängig von m sind, so wird, indem man sie substituirt und auf gleichen Nenner bringt, folgendes kommen:

$$\frac{1}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2n}} (xdx + ydy) = A^{\frac{1}{n}} (xdy - ydx).$$

Mit dieser Gleichung wird man die Subtangenten, die Tangenten u. s. w. der Spiralen bestimmen, indem man von den Formeln aus Nr. 246 Gebrauch macht, allein es wird einfacher und zugleicherzeit allgemeiner seyn, diese Formeln in Beziehung auf die veränderlichen Größen u und t, zu transformiren, und dies ist es was wir vornehmen wollen.

277.

Der Ausdruck der Subtangente wird, indem man für y und $\frac{dx}{dy}$ ihre Werthe setzt

$$PT = u \sin(t - m) \frac{du \cos.(t-m) - udt \sin(t-m)}{du \sin.(t-m) + udt \cos(t-m)}.$$

Man wird dieses Resultat viel einfacher machen, wenn man beobachtet, daß die Lage der Abscissenlinie auf welche die Entfernung PT fällt, willkührlich ist, und daß man folglich immer m so nehmen kann, daß der Bogen

Q'N von 90° sey, in welchem Fall, die Ordinate OM mit dem Radiusvector AM zusammenfällt,

$$\cos(t-m)=0, \quad \sin(t-m)=1,$$

und PT verwandelt sich in

$$AT' = -\frac{u\,dt}{du}.$$

Man wird die Tangente verzeichnen, wenn man durch den Punct A eine Senkrechte auf den Radiusvector AM zieht, und auf diese grade Linie den Werth von AT trägt, der durch die obenangeführte Formel gegeben ist.

Wenn man diese Formel auf die Gleichung

$$u = At^n,$$

anwendet, so wird man finden

$$AT' = -\frac{n^2}{nAt^{n-1}} = -\frac{A}{n}t^{n+1}.$$

In der Spirale des Conon hat man

$$n=1 \text{ und } A=\frac{1}{2\pi};$$

es geht daraus hervor

$$AT' = -\frac{t^2}{2\pi}.$$

Man sieht durch diesen Ausdruck daß wenn $t=2\pi$, oder daß nach einer Umwälzung des beschreibenden Halbmessers, die Subtangente der rectificirten Peripherie gleich ist, so wird man eine vierfache Subtangente am Ende der beyden Umwälzungen finden u. s. w. wie Archimedes es bemerkt hat. Wenn $n=-1$ ist, welches der Fall der hyperbolischen Spirale ist, so wird man $AT' = A$ haben, d. h. daß die Subtangente dieser Curve beständig ist.

Ich

Ich halte mich nicht bey der Untersuchung der Normale und Subnormale auf, weil man dieselben leicht erhält, sobald die Subtangente bekannt ist.

Ich bemerke bloß daß

$$\frac{AT'}{AM} = \frac{udt}{du},$$

die Tangente des Winkels ausdrückt, welcher der Radiusvector AM mit der grade T'M macht, die die Curve im Puncte M berührt, und daß man

$$TM = \sqrt{AM^2 + AT'^2} = u\sqrt{1 + \frac{u^2dt^2}{du^2}}$$

hat.

278.

Wir wollen jetzt den Ausdruck des Krümmungshalbmessers transformiren: um dt als beständig anzunehmen, wollen wir zugleich dx und dy sich verändern lassen, und wir werden uns wie in Nr. 273 der Formel

$$a = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

bedienen.

Dieses fest gesetzt, werden die Werthe von dx und dy (Nr. 276) indem man auf die Gleichung

$$\sin(t - m)^2 + \cos(t - m)^2 = 1,$$

Rücksicht nimmt, geben:

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + u^2dt^2,$$

$$dx^2 = d^2u\cos(t-m) - 2du\,dt\sin(t-m) - udt^2\cos(t-m),$$

$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2du\,dt\cos(t-m) - udt^2\sin(t-m),$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2du^2\,dt - udt\,d^2u + u^2\,dt^2,$$

und folglich

$$a = -\frac{(du^2 + u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{udt\,d^2u - 2du^2dt - u^2dt^3}.$$

Die-

Dieses Resultat, wie man es erwarten konnte, ist unabhängig von der Größe m, welche nur von der willkührlichen Lage der Linie AB abhängt, und man hätte die Rechnungen vereinfachen können, wenn man voraussetzte, daß diese grade Linie mit dem Radiusvector AM zusammenfiele d. h. indem man in den Werthen der Differentialle

$$dx,\ dy,\ d^2x \text{ und } d^2y,$$

$$\sin(t - m) = 0 \text{ und } \cos(t - m) = 1$$

macht, welche dadurch sich auf

$$dx = du, \quad dy = u\,dt, \quad d^2x = d^2u - u\,dt^2,$$

$$d^2y = 2du\,dt,$$

reducirt befunden hätten.

Wenn man von den Polar-Coordinaten Gebrauch macht, so berechnet man auch die Entfernung ME, welche zwischen dem Punct M und dem Fuß der Perpendiculare EF, die vom Centrum des Berührungskreises auf die grade Linie AM gezogen, begriffen ist, weil sie zuweilen die Construction des Krümmungshalbmessers eleganter macht. Man sieht leicht daß die Dreyecke MAT′ und MEF ähnlich sind, und

$$MT' : AT' :: MF : ME,$$

geben; setzt man für MT′ und für AT′ ihre Werthe, so wird man bekommen

$$ME = -\frac{u\,du^2 + u^3\,dt^2}{u\,d^2u - 2du^2 - u^2dt^2}.$$

Um eine Anwendung dieser Formel zu machen, nehme ich die logarithmische Spirale deren Gleichung $t = lu$ ist. Indem man differentiirt findet man

$$dt = M\frac{du}{u} \text{ oder } \frac{u\,dt}{u} = M,$$

woraus man sieht, daß in allen Puncten dieser Curve die

die Tangente denselben Winkel mit dem Radiusvector macht.

Eine zweyte Differentiation giebt

$$ud^2u - du^2 = 0,$$

woraus man schließt

$$d^2u = \frac{du^2}{u};$$

substituirt man diesen Werth, so wie den von dt, in dem Ausdruck von ME, so wird man bekommen:

$$ME = -\frac{udu^2 + uM^2du^2}{-du^2 - M^2du^2} = u = AM, \text{ (Fig. 35)}$$

Es folgt daraus, daß die grade Linie AF, senkrecht auf den Radiusvector gezogen, die Normale MF im Mittelpunct des Berührungskreises, oder im correspondirenden Puncte der Abgewickelten FZ begegnen wird. Diese Abgewickelte wird eine der vorgegebenen ähnlichen Spirale seyn; denn da der Winbel AFM gleich T′MA ist, so wird er dasselbe für alle Puncte der Curve FZ, so wie für die der Curve MX seyn.

279.

Es ist einleuchtend, daß die Länge des Bogens einer Curve eine Function von seiner Abscisse oder von seiner Ordinate ist, und daß folglich das Differential dieser Größe, sich vermittelst dieser veränderlichen Größen und ihrer Differentialien muß ausdrücken lassen.

Wenn man den Bogen DM (Fig. 36) z nennt, und die Abscisse AP gleich x setzt, so z ist eine Function von x, und es entstehet daraus

$$DM + MM' = z + \frac{z'h}{1} + \frac{z''h^2}{1.2} + \frac{z'''h^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

wenn

wenn x sich in

$$AP' + PP' = x + h,$$

verwandelt, z', z'', z''', u. s. w. indem sie die Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ u. s. w. vorstellen, deren successive Ableitung, wie man weiß, so beschaffen ist, daß sobald man die erste kennt, auch die folgenden finden kann. Dieses festgesetzt, wenn man die Ordinaten PM und P'M' einander nahe genug nimmt, damit die Curve zwischen ihnen keine Beugung erleidet; zieht man die Tangente MT, und die Sehne MM', so wird man sich ohne Mühe überführen, daß der Bogen MOM', MM' übertrifft, und daß er weniger ist, als die Summe der graden Linien MN und MN'. Es folgt daraus daß die Entwickelung des kleinen Bogens MM', welche durch die Reihe

$$\frac{z'h}{1} + \frac{z''h^2}{1 \cdot 2} + \frac{z'''h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{u. s. w.}$$

vorgestellt ist, sich unter diejenigen der Größen MM' und MN + M'N befinden muß; berechnen wir also einen jeden von diesen letztern.

Das rechtwinklige △ MM'Q wird geben

$$MM' = \sqrt{MQ^2 + M'Q^2};$$

da aber

$$MQ = h, \qquad M'Q = P'M' - PM,$$

und P'M' dasjenige ist, was y wird, sobald x sich in x + h verändert, so wird man zur Entwickelung von M'Q die Reihe

$$\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1 \cdot 2} + \frac{y'''h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{u. s. w.}$$

haben, welche man zur Abkürzung unter der Form

$$(y' + ph)h,$$

setzen kann, indem man

p=

$$p = \frac{y''}{1.2} + \frac{y'''h}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

macht; substituirt man diesen Werth, so wie den von MQ, so bekommt man

$$MM' = \sqrt{h^2 + (y' + ph)^2 h^2} = h(1 + y'^2 + 2py'h + p^2h^2)^{\frac{1}{2}}:$$

machen wir auch zu mehrerer Vereinfachung

$$2py' + p^2h = q,$$

so bekommen wir

$$MM' = h\,[(1 + y'^2) + qh]^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickeln wir die Quadratwurzel, vermittelst der binomischen Formel, so wird daraus hervorgehen.

$$MM' = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,h + \tfrac{1}{2}(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}\,qh^2 + \ldots$$

MN und NQ wird man durch die Vergleichung der ähnlichen Dreyecke TPM und MQN, finden, woraus man schließt

$$MN = \frac{TM \times MQ}{PT} = h\sqrt{1 + y'},$$

$$NQ = \frac{MP \times MQ}{PT} = y'h$$

(Nr. 246) und da

$$M'N = M'Q - NQ$$

so bekommt man

$$M'N = \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

Fügt man dieser Reihe den Werth von MN hinzu, so wird das Resultat

$$h\sqrt{1 + y'^2} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \ldots$$

die Entwickelung von MN + M'M seyn.

Es ist leicht zu sehen daß, wenn die Curve ihre Concavität gegen die Abscissenaxe kehrte, man alsdann

M'N

$$M'N = NQ - M'Q$$

bekommen würde; allein der Ausdruck von M'N würde noch dasselbe erste Glied wie oben haben, weil der Coefficient y'' negativ seyn würde.

Nähern wir die verschiedenen Entwickelungen, welche wir so eben gefunden, so werden wir die drey Reihen haben:

$$MM' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h + \tfrac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}qh^2 + \ldots$$

$$MOM' = \frac{z'h}{1} + \frac{z''h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$MN + M'N = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h + \frac{y''h^2}{1.2} + \ldots$$

wovon die zwischenliegende eine Größe ausdrückt, welche zwischen den Werthen der beyden andern begriffen ist; da aber diese letzteren dasselbe erste Glied

$$(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h,$$

haben, so schließt man daraus, nach dem, was in der Einleitung (Nr. 36) bewiesen worden, daß

$$z' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir statt z' und y' den Differentialausdruck der Coefficienten, welche sie vorstellen, so bekommt man

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ oder } dz = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Man könnte durch diese Formel zum Differential des Kreisbogen gelangen, welches wir a priori (Nr. 23) erhalten haben, denn da die Gleichung

$$x^2+y^2=a^2, \quad dy = -\frac{xdx}{y},$$

giebt, so findet man

$$dz = \frac{a.dx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}:$$

wenn man x in u verändert, und den Radius $= 1$ annimmt, so wird man auf das Resultat der citirten Nr. zurückfallen.

Indem man für

$$dx^2 + dy^2$$

seinen Werth

$$du^2 + u^2 dt^2$$

welcher in der vorhergehenden Nr. gefunden worden, setzt, so wird man

$$dz = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2}$$

zum Ausdruck vom Differential des Bogens auf die Polar-Coordinate u und t bezogen, bekommen.

280.

Der Flächeninhalt einer Curve oder die Größe des Raums ADMP welcher zwischen den Axen AB und AC, den Bogen DM und der Ordinate PM begriffen ist, ist noch eine Function der Abscisse AP, und man wird davon das Differential auf eine analoge Art finden, wie wir zu dem Differential des Bogens in der vorhergehenden Nr. gekommen sind. Wenn wir diese Function durch s vorstellen, so wird s

$$s + \frac{s'h}{h} + \frac{s''h^2}{1.2} + \frac{s'''h^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

sobald sich x in $x + h$ verwandelt; der Ausdruck des Raums PMM'P' wird also zur Entwickelung

$$\frac{s'h}{h} + \frac{s''h^2}{1.2} + \frac{s'''h^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

haben, allein es ist leicht zu sehen, daß dieser Raum größer ist, als das eingeschriebene Rechteck PMQP' welches zum Ausdruck

$$PP' \times PM = yh,$$

hat,

hat, und kleiner als das umschriebene Rechteck PRM'P', welches gleich

$$PP' \times PM' = h\left(y + \frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \ldots\right);$$

die Reihe

$$\frac{s'h}{1} + \frac{s''h^2}{1.2} + \frac{s'''h^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

ist also zwischen den Größen

$$yh \text{ und } yh + \frac{y'h}{1} + \frac{y''h}{1.2} + \text{u. s. w.}$$

begriffen, und man schließt daraus, daß $s' = y$ (Einleit. Nr. 36) oder $\frac{ds}{dx} = y$, oder endlich $ds = ydx$, ein merkwürdiges Resultat, weil es uns lehrt: daß der Differential-Coefficient von der Function der Abscisse, welche den Flächeninhalt irgend einer Curve ausdrückt, der Ordinate dieser Curve gleich ist.

Man siehet hieraus, daß, ob man gleich den endlichen algebraischen Ausdruck der Oberfläche gewisser Curven nicht erhalten kann, so gelangt man demohngeachtet zu der Kenntniß des Differential dieses Ausdrucks, also für den Kreis wird man haben

$$ydx = dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

281.

Sobald die vorgegebene Curve auf Polar-Coordinaten bezogen ist, so wird ihre Oberfläche durch den Sector ADM (Fig. 37), welcher zwischen den Bogen DM und den beyden Vectoren AD und AM begriffen ist, ausgemessen. Um davon das Differential zu finden, muß man wie vorher, das erste Glied der Entwickelung von der Größe

suchen in welcher sich der Sector verwandelt, sobald der Bogen $NO = t$, zu

$$NO + NN = t + m$$

wird, und welcher durch den Sector MAM' vorgestellt ist. Wenn man aber durch die Puncte M und M' die graden Linien MR und $M'R'$ respective senkrecht auf AM und AM' zieht, so wird man zwey rechtwinklige Dreyecke bilden, zwischen welchen, sowohl seiner Größe als seiner Lage nach, der Sector $M'AM'$, begriffen seyn wird. Die Oberfläche des ersten wird ausgedrückt durch $\frac{AM \times MR}{2}$, und die des zweyten durch $\frac{AM' \times M'R'}{2}$. Indem wir AM oder u als eine Function von t betrachten, so wird die Entwickelung von AM',

$$u + \frac{u'm}{1} + \frac{u''m^2}{1.2} + \ldots$$

seyn; man hat überdem:

$$MR = AM\,tg.\,MAR = u\,tg.\,m = u\left(m + \frac{m^3}{3} + \ldots\right) (\text{Nr.}106),$$

$$M'R' = AM'\,tg.\,M'AR' = \left(u + \frac{u'm}{1} + \ldots\right)\left(m + \frac{m^3}{3} + \ldots\right);$$

substituiren wir diese Werthe in denen der Dreyecke MAR und $M'AR'$, so wird man für alle beyde dasselbe 1te Glied $\frac{u^2m}{2}$ haben, und man schließt folglich daraus, daß die Entwickelung von dem Ausdruck des Sectors MAM' ebenfalls mit diesem Gliede anfangen muß. Wenn man also durch s den Sector DAM bezeichnet, so wird man, da die Entwickelung von MAM' von der Form

$$s'\frac{m}{1} + s''\frac{m^2}{1.2} + \ldots \text{ ist,}$$

$s =$

$$S = \frac{dS}{dt} = \frac{u^2}{2}$$

und endlich

$$dS = \frac{u^2 dt}{2} \text{ haben.}$$

282.

Eine Curve ist nicht nur gegeben, wenn man ihre Gleichung hat, sey es in Coordinaten zu zwey fixen graden Linien, respective parallel, oder sey es in Polar-Coordinaten; sondern sie ist es auch noch, wenn man irgend eine Relation, zwischen zwey durch ihre Natur bestimmten Größen hat. Die Eigenschaft welche die logarithmische Spirallinie (Nr. 278) hat, einen beständigen Winkel mit dem Radiusvector AM zu machen, könnte Gelegenheit zu einer Gleichung zwischen die graden Linien AM und AT′ (Fig. 35) geben, und welche, wenn man die erste u, und die andere v nennte, folgende seyn würde, $u = av$: man wird von dieser Gleichung zu derjenigen übergehen welche in Polar-Coordinaten statt haben muß, indem man statt AT′, seinen Ausdruck $\frac{u^2 dt}{du}$ setzt.

Desgleichen muß eine Relation zwischen den Krümmungshalbmesser und den Bogen einer Curve, als eine Gleichung dieser Curve betrachtet werden, und sie wird den merkwürdigen Character haben, daß eine der veränderlichen Größen völlig der Curve inherirt seyn würde, denn da die Größe des Krümmungshalbmesser gänzlich unabhängig von der Natur und der Lage der Coordinaten ist, so bleibt sie stets dieselbe für denselben Punct die Curve mag eine Lage haben, welche sie wolle. In

Ansehung des Bogens, würde sein Ursprung willkührlich seyn, weil man von einem beliebigen Puncte der Curve anfangen könnte ihn zu zählen.

Um von den rechtwinkligen oder Polar-Coordinaten zu einer Relation zwischen den Bogen und dem Krümmungshalbmesser überzugehen, müste man im erstern Falle x und y aus der vorgegebenen Gleichung eliminiren, vermittelst der Gleichungen

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 \text{ und}$$

$$a = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{dz^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \text{ (Nr. 261)}$$

und im zweyten Falle u und t wegschaffen, indem man von der Gleichung

$$dz^2 = du^2 + u^2dt^2$$

und dem Ausdrucke von a welcher Nr. 278 gefunden worden, Gebrauch macht.

Dieselben Gleichungen werden das Mittel an der Hand geben z und a zu eliminiren, und von einer Gleichung zwischen diesen veränderlichen Größen auf eine andere zwischen die rechtwinklige oder Polar-Coordinaten zurückzukommen; die Mittel diese Eliminirung zu machen sind Nr. 78 gezeigt worden.

Man muß beobachten, daß unter den Relationen, die eine Curve caracterisiren können, es welche giebt, die durch algebraische Gleichungen ausgedrückt sind, und andere, welche es nur durch Differentialgleichungen sind; diese letztern sind gewissermasse unbestimmt, d. h. daß sie zu einer unendliche Menge von Curven, welche alle mit einer gemeinschaftlichen Eigenschaft begabt sind, gehören können, denn nach der Nr. 50 gemachten Bemerkung, muß die primitive Gleichung von welcher sie ihren Ursprung haben, eine dem Exponenten ihrer Ordnung

gleiche

gleiche Anzahl von willkührlichen beständigen Größen einschließen. Die geometrischen Betrachtungen bestätigen selbst diese Bemerkung.

Wenn man z. B. die Gleichung der Parabel $y^2 = Ax$ differentiirte, und man nachgehends A eliminirte, so würde man zum Resultat die Gleichung

$$2xdy - ydx = 0$$

haben, welche da sie $y . \frac{dx}{dy} = 2x$ giebt, ausdrückt, daß die Subtangente das doppelte der Abscisse ist, eine Eigenschaft, welche allen Parabeln gemein ist, ihr Parameter sey welcher er wolle.

Da die Gleichung

$$y^2 = m(a^2 - x^2)$$

zu einer Ellipse gehört, deren Mittelpunct im Ursprunge der xen und der y's ist, und, deren, in der Richtung der Coordinatenaxen, liegenden Axen, a und $a\sqrt{m}$ sind, giebt durch die Eliminirung der beyden beständigen a und m, die Differentialgleichung der 2ten Ordnung:

$$y \frac{d^2y}{dx} - x \frac{dy^2}{dx^2} - xy \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (\text{Nr. } 51);$$

jede der Ellipsen, welche erstere vorstellen kann, indem man den Größen a und m alle mögliche Werthe giebt, befriediget die 2te und der Kreis von der Gleichung

$$x^2 + y^2 = A^2,$$

befindet sich darin mit begriffen.

Man sieht aus dem Vorhergehenden das die Betrachtung der Differentialgleichungen die Mittel zeigt die allgemeinsten Eigenschaften der Curve auszudrücken, indem es zu Resultaten führt, welche unabhängig von den beständigen Größen sind, welche die Curve particularisiren.

283.

Anwendung der Methode der Gränzen auf die Untersuchung der Berührungslinien.

Die Gleichungen der Berührungslinien von einer gegebenen Natur, können sich mit eben so vieler Leichtigkeit als Eleganz bestimmen, indem man von der Methode der Gränzen Gebrauch macht, deren Identität mit der Differentialrechnung wir Nr. 92 gewiesen haben. Es sey (V) eine Gleichung zwischen x und y und einer Anzahl n von willkührlichen beständigen Größen; man könnte die Curven welche sie vorstellt particularisiren, indem man sie durch eine gleiche Anzahl gegebener Puncte (Nr. 229 durch gehen ließe. Wir wollen uns diese Puncte in der Curve DX, von welcher wir die Gleichung in x' und y' haben, liegend gedenken; um die Gedanken mehr zu fixiren, wollen wir nur drey betrachten nemlich M, M', M'', (Fig. 38) und wollen voraussetzen, daß die Ordinaten PM, $P'M'$, $P''M''$, unter einander um die nemliche Größe h entfernt sind. Es ist einleuchtend, daß für jeden dieser Puncte, die Werthe der Ordinaten, welche aus der Gleichung (V) die zur Curve EY gehört, abgeleitet sind, dieselben seyn müssen, wie diejenigen, welche aus der Gleichung der Curve DX hervorgehen, und daß folglich, wenn man jede dieser letztern successive statt y in der Gleichung (V) setzt, und zu x die Werthe x', $x' + h$, $x' + 2h$ der correspondirenden Abscissen AP, AP', AP'' substituirt, man drey Gleichungen erhalten wird, welche dazu dienen können eben so viel willkührliche beständige Größen zu bestimmen. Für den Gegenstand welchen wir uns vorgegeben wird es bequemer seyn, unmittelbar unter sich die Werthe von PM, $P'M'$, $P''M''$ welche aus der einen und der andern

Curve

Curve gezogen sind, zu vergleichen; oder da die erste y' in der Curve DX ist, so wird die zweyte, welche $x' + h$ entspricht zur Entwickelung in der nemlichen Curve

$$y' + \frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

oder

$$y' + ph + qh^2 + \ldots \text{ haben}$$

die Entwickelung der dritten, welche sich auf die Abscisse $x'+2h$, bezieht, wird erhalten, wenn man in der vorhergehenden $2h$ statt h substituirt, und man wird bekommen:

$$y' + 2ph + 4ph^2 + \ldots$$

Desgleichen da in der Curve EY die erste Ordinate PM, y ist, so werden die beyden folgenden durch die Reihen

$$y + Ph + Qh^2 + \ldots \text{ und } y + 2Ph + 4Qh^2 + \ldots$$

ausgedrückt, indem man beobachtet in den Functionen y, P, Q u. s. w., x in x', zu verwandeln. Dieses festgesetzt, wird man die 3 folgenden Gleichungen haben

$$y = y' \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \ldots = y' + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots (2)$$

$$y + 2Ph + 4Qh^2 + 8Rh^2 + \ldots = y' + 2ph + 4qh^2 + 8rh^3 + \ldots (3)$$

Man kann y und y' in den zwey letzten, auslöschen, weil die erstere die Gleichheit dieser beyden Functionen ausdrückt; man wird in der Folge die Glieder Ph und ph der 3ten eliminiren, welche, da sie denselben Coefficienten haben, zusammen verschwinden; man wird also statt der Gleichungen (1) und (2) finden:

$$Ph + Qh^2 + Rh^3 + \ldots = ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

$$2Qh^2 + 6Rh^3 + \ldots = 2qh^2 + 6rh^3 + \ldots$$

dividirt man das erste dieser Resultate durch h und das zweyte durch $2h^2$, so bekommt man

$$P + Qh + Rh^2 + \ldots = p + qh + rh^2 + \ldots$$

$$Q + 3Rh^2 + \ldots \qquad q + 3rh^2 + \ldots$$

Dieses sind die Entwickelungen der Gleichungen, welchen die beständigen Größen der Gleichung (V) genugthun müssen, damit sie zu einer Curve EY gehören könne, welche die Curve DX in den 3 Puncten M, M', und M'' begegnet. Indem man begreift, daß diese Puncte sich mehr und mehr nähern, wird man sehen, daß die Curve EY ohne Ende dahin streben wird, die Curve DX bloß zu berühren, und daß die Vereinigung der drey Durchschnittspuncte sich in eine Berührung verwandeln wird. Um die Puncte M, M' und M'' zusammenfallen zu lassen, muß man $h = 0$ voraussetzen; diese Hypothese vernichtet keine von den so eben erhaltenen Gleichungen, giebt aber ihre Gränzen, welche der Berührung der beyden Curven entsprechen, und

$$P = p, \quad Q = q \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2},$$

sind, wie wir Nr. 259 gefunden haben.

Indem wir einen vierten, zur Abscisse $x' + 3h$ correspondirenden Punct betrachten, so wird man für diesen Punct die Gleichung haben:

$$y + 3Ph + 9Qh^2 + 27Rh^3 + 81Sh^3 + \ldots$$
$$= y' + 3ph + 9qh^2 + 27rh^3 + 81sh^4 + \ldots$$

wenn man hiervon y und y' weglöscht und alsdann die Glieder Ph und ph, Qh und qh^2 vermittelst der auf die beyde vorhergehende Puncte sich beziehende Gleichungen, eliminirt, wird man haben:

$$6Rh^3 + 36Sh^4 + \ldots = 6rh^3 + 36sh^4 + \ldots$$

dieses dividirt durch $6h^3$, bekömmt man:

$$R + 6Sh + \ldots = r + 6sh + \ldots$$

und nimmt man die Gränzen von einem jedem Gliede, so wird man für den Fall, da die vereinigten Durchschnittspuncte

sich

sich in eine Berührung verwandeln werden, $R = r$ erhalten.

Es ist leicht dieses Verfahren auf eine beliebige Menge Puncte auszudehnen, und folglich die, auf eine Berührung von irgend einer beliebigen Ordnung, sich beziehende Bedindungen zu finden, indem man sie als die Vereinigung einer gewissen Anzahl Durchschnittspuncte betrachtet. Die Berührung der ersten Ordnung, resultirt aus der von 2 Puncten, die der zweyten Ordnung aus der von 3 Puncten und im Allgemeinen diejenige der nten Ordnung aus der von $n + 1$ Puncten. Die Gleichung der Tangente leitet sich sehr leicht aus diesen Betrachtungen ab, denn indem man die Gleichung einer graden Linie

$$y = ax + b$$

statt der Gleichung (V) nimmt, so hat man $\frac{dy}{dx} = a$; und die beyden beständigen Größen a und b sind durch die Gleichungen

$$y = y' \text{ oder } y' = ax' + b, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \text{oder } a = \frac{dy'}{dx'},$$

bestimmt, welches wie in Nr. 238

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') \text{ giebt.}$$

284.

Wir haben in Nr. 240 gesehen, wie man aus der Gleichung der Tangente, den Ausdruck der Subtangente zieht; allein man kann unmittelbarer dazu gelangen, indem man die Gränze des Ausdrucks, von dem Theil PS, (Fig. 36) der Axe AB, welche zwischen dem Fuß der Ordinate PM und dem Puncte, wo irgend eine Secante

M'S

M'S diese Axe begegnet, begriffen ist, sucht; denn es ist einleuchtend, daß, nach Maaßgabe als sich die Puncte M und M' einander nähern, sich auch die Linie M'S der Tangente MT nähern wird, und daß, wenn diese beyde Puncte vereinigt seyn werden, der Punct S auf den Punkt T fallen wird. Die ähnlichen Dreyecke MM'Q und MPS werden

$$PS = \frac{MP \times MQ}{M'Q}$$

geben; indem man aber MQ durch h vorstellt, wird man

$$M'Q = ph + qh^2$$

bekommen. Daraus

$$PS = \frac{y'h}{ph + qh^3 + \ldots} = \frac{y'}{p + qh + \ldots}:$$

indem man die Grenze nimmt, resultirt daraus

$$PT = \frac{y'}{p} = \frac{y'\,dx'}{dy'}.$$

Das was man eben gelesen hat, ist hinlänglich, die Methode der Grenzen auf alles was die Theorie der Curven angeht, anzuwenden; es reicht hin, zuerst Puncte die unter sich entfernt sind zu betrachten, und hat man eine Größe welche von ihrer gegenseitigen Entfernung abhängt, eingeführt, so sucht man in der resultirenden Gleichung die Glieder, wodurch man sie kann verschwinden lassen, und deren Ensembel die Gleichung der Grenze ausmacht oder diejenige, welche statt finden muß, sobald die vorgegebenen Puncte zusammenfallen.

285.

Leibnitz, betrachtet die Curven, um die Differentialrechnung darauf anzuwenden, als Polygone, von einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Seiten, und in dieser

ser Hypothese, ist die Tangente nichts anders als die Verlängerung der Polygonseite selbst, wie man es in (Fig. 39) sieht. Die ähnlichen Dreiecke M′MQ und PMT, geben sogleich

$$PT = \frac{MP \times MQ}{M'Q} = \frac{ydx}{dy}.$$

Es scheint anfangs, daß diese Art die Subtangente zu finden, nichts anders als eine Approximation sey, denn so klein man auch die Seiten des Polygons voraussetzt, so werden sie doch niemals mit der Curve zusammenfallen, und folglich wird die grade Linie MT, niemals Tangente seyn; allein man führt in der Rechnung einen Umstand ein, welcher, die Substitution des Polygons bey der Curve, rechtfertigt, man abstrahirt nemlich von den Potenzen von dx, die höher sind als die ersten und von allen Größen, welche man als unendlich klein in Ansehung der andern betrachtet.

In der That, wenn, von einer Seite die analytischen Resultate, welche man so erhalten hat, um so genauer sind, als dx kleiner ist, so differirt von der andern Seite das Polygon um so weniger von der Curve, als seine Seiten mehr vervielfacht sind, oder als der Raum PP′ welcher dx vorstellt geringer ist, und da nichts dem entgegensteht, daß man sich diese Seiten über eine beliebige Gränze hinaus vervielfacht sich gedenkt, so folgt daraus, daß das im Polygon berechnete Resultat, von dem welches ihm in der Curve entspricht, um eine geringere, als eine gegebene Größe, unterschieden seyn kann.

Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, scheint mir die Differentialrechnung keinen Begriff darzubieten, welchen ein fähiger Verstand nicht zugeben könnte, und sie wendet sich alsdann mit der größten Leichtigkeit auf alle Fragen

gen an, welche man in der Theorie der Curven antrift. *)

Der Bogen MOM′ (Fig. 36) kann für seine Sehne genommen werden, von welcher er in Beziehung auf die Größen der ersten Ordnung nicht unterschieden ist, weil, nach dem was man Nr. 279 gesehen hat, die beyden Größen MM′ und MN + NM′ zwischen welchen er enthalten ist,

*) Mit Unrecht haben einige Personen Leibnitzen vorgeworfen, daß er keine richtige Begriffe über die Metaphysick der Differentialrechnung hätte; bey Gelegenheit einer Arbeit von dem Geometer Sturm, über die Quadratur der Curven und Cubatur der Körper vermittelst der Reihen, drückt er sich so aus:

„Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus „adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam „meo dimetiendorum curvilineorum principio, quod „figura curvilinea censenda sit aequipolle„re polygono infinitorum laterum: unde sequi„tur, quicquid de tali polygono demonstrari potest, si„ve ita, ut nullus habeatur at numerum laterum respec„tus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quanto major „sumitur laterum numerus, ita ut error tandem fiat quo„vis dato minor; id de curva posse pronuntiari." (Acta eruditorum ann. 1684. pag. 585)

Diese wenige Zeilen, stellen mit eben so viel Wahrheit als Bündigkeit die Idee dar, welche man sich von der Methode der unendlich kleinen Größen machen muß; und die von d'Alembert erneuerte Methode der Gränzen, ist deutlich genug darin angegeben. Leibnitz hat noch in mehreren seiner Briefe widerholt, daß indem man sich zur Abkürzung der Schlüsse die Betrachtungen der unendlich kleinen Größen bedient, man von dem Styl des Archimedes, nur in den Ausdrücken differirt.

ist, selbst nur um Größen der zweyten Ordnung differiren. Man hat also alsdenn,

$$MOM' = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Das gradlinige Dreyeck MQM' (Fig. 39) mit dem Dreyeck MPR verglichen, läßt die Normale und Subnormale finden.

286.

Da die Ordinate PM oder y, durch f(x) vorgestellt ist, so wird die folgende P'M', f(x + dx) seyn; woraus folgt, daß die Differentiale

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx \text{ (Nr. 10)}$$

M'Q vorstellen wird. Wenn man x + dx in f'(x) dx, setzt, so kommt f'(x + dx) dx zum Ausdruck des Differential M''Q' in Beziehung auf die Ordinate P'M'; indem man aber die grade Linie M'M verlängert, bis sie die Ordinate P''M'' in O begegnet, so bekommt man M'Q=Q'O, und OM''=M''Q'—M'Q=f'(x+dx)dx—f'(x)dx, wird also das zweyte Differential der Ordinate PM, oder d^2y seyn. Betrachtet man noch einen vierten Punct M''', so wird man sehen, daß O'M''' in Ansehung des Puncts M', das ist, was OM'' in Beziehung auf den Punct M ist, und daß er folglich darstellt was $f''(x)\,dx^2$ oder d^2y wird, wenn x sich in x + dx verwandelt, man bekömmt also

$$O'M''' = f''(x + dx)\,dx^2, \text{ und}$$

$$O'M''' - OM'' = f''(x + dx)dx^2 - f''(x)\,dx^2 = d^3f(x):$$

eben so wird man die fernern Differentiale formiren, indem man eine größere Zahl aufeinander folgender Puncte nimmt.

Es ist durch das Vorhergehendr sehr einleuchtend, daß die Curve gegen die Axe AB concav seyn würde, wenn

QM''

QM'' weniger wäre als Q'O, oder QM', und daß alsdenn OM'' oder d^2y negativ wäre.

Wenn statt die Ordinaten gleichweit von einander entfernt zu supponiren, man die auf einander folgenden Seiten des Polygons M M' M'' M''' .. alle gleich annehmen wollte, so würde dieses nicht mehr das Differential dx seyn, welches man als beständig ansehen muß, sondern der Ausdruck $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

287.

Wenn man die Curven auf Polar-Coordinaten bezieht, so ist das erste Differential des Radiusvector, AM (Fig. 40) der Theil QM', welcher vom folgenden Radiusvector, durch den Bogen des Kreises MQ, welcher vom Punct A als Centrum, mit dem Radius AM beschrieben, abgeschnitten ist. Man betrachtet diesen kleinen Bogen als eine grade Linie, und das Dreyeck MQM' als gradlinig, welches,

$$MM' = \sqrt{QM^2 + QM'^2}$$

giebt. Wenn man den Winkel MAM' durch einen Bogen des Kreises NN', welcher durch einen der Einheit gleichen (Nr. 275) Radius AN beschrieben ist, mißt, so hat man QM = udt, und da QM = du ist, so kommt

$$MM' = \sqrt{du^2 + u^2dt^2}.$$

Man gelangt zum Ausdruck der Subtangente AT, welche wir in Nr. 277 gefunden haben, indem man die Dreyecke M'MQ und MAT unter sich vergleicht, welche man als ähnlich betrachtet, weil, da der Winkel MAM', unendlich klein in Ansehung von MAT ist, M'Q parallel zu AM, und MQ senkrecht auf M'Q supponirt werden kann; es resultirt

resultirt hieraus

$$AT = \frac{AM \times MQ}{M'Q} = \frac{u^2 dt}{du}.$$

Da das zweyte Differential d^2u, die Differenz zwischen zwey erste aufeinanderfolgende Differentiale ist, so wird es durch $M''Q - M'Q$ vorgestellt werden, und man muß beobachten, daß, wenn man den Bogen NN′ als beständig supponirt, oder daß, man den Winkel t um dieselbe Größe verändern läßt, so sind die Bogen QM, Q′M′, deswegen nicht unter einander gleich; denn alle Halbmesser sind verschieden.

288.

Betrachtet man die Berührungscurven, als Polygone, welche eine gewisse Anzahl Seiten mit dem Polygon, welches die vorgegebene Curve vorstellt, gemein hat, so wird man ohne Mühe bemerken, daß für jede dieser Seiten, die Differentiale dieselben seyn müssen im berührenden und berührten Vieleck. Nennt man also die Ordinate der Berührungscurve y, und die der vorgegebenen Curve y′, so wird man zur Tangente die nur mit einer einzigen Seite zusammenfällt $y = y'$ und $dy = dy'$ haben. In den Berührungscurven der zweyten Ordnung, welche zwey Seiten mit der vorgegebenen gemein haben, wird man zugleich haben:

$$y = y', \quad dy = dy', \quad d^2y = d^2y' \text{ u. s. w.}$$

für die höhern Ordnungen. Diese Resultate vertragen sich sehr einleuchtend, mit denen von Nr. 269, weil dx dasselbe für beyde Curven ist.

289.

Man kann noch die Theorie der Berührungskreise von einer zu eleganten und reichhaltigen Betrachtung ableiten, um sie mit Stillschweigen zu übergehen. Wenn man auf die Mitte der Seiten MM', $M'M''$, (Fig. 39) die Senkrechten GF, $G'F'$, errichtet, so wird ihr Durchschnittspunct F' der Mittelpunct des Kreises seyn, welcher durch die drey Puncte M, M', M'', gehet, und eben so ist es mit den andern; aber je mehr die Seiten des Vielecks vervielfacht werden, desto mehr werden die Linien GF, $G'F'$ sich nähern Normalen der Curve zu werden, und je weniger wird der Kreis $MM'M''$ vom Berührungskreis differiren. Man könnte also den Mittelpunct der Krümmung, als den Durchschnittspunct der beyden unendlichen Normalen, und die Abgewickelte $FF'F''\ldots$ als die aus allen diesen Durchschnitten resultirende Curve, betrachten. Es ist alsdann sehr einleuchtend, daß sie durch alle Normalen berührt werden muß, und daß die Berührungskreise zu gleicher Zeit, die vorgegebene Curve berühren und schneiden, wie es Nr. 262 gezeigt worden. Um diese Umstände analytisch auszudrücken, wird man wieder die Gleichung der Normale nehmen, welche, indem sie durch x' und y' die Coordinaten des auf der vorgegebenen Curve genommenen Puncts bezeichnet, unter der Form

$$(y - y')dy' + (x - x')dx' = 0 \ldots \quad (1)$$

(Nr. 245) gesetzt werden kann, und man wird beobachten, daß um zur Normale des folgenden Puncts überzugehen, man $x' + dx'$ für x' substituiren, und folglich y' verändern lassen müßte, daß aber indem man die Coordinaten x und y auf den Durchschnittspunct der beyden Normalen

len anwendet, sie in diesem Fall sich nicht verändern müssen; man wird die Differentiale der Gleichung (1) bloß in Beziehung auf x' und y' genommen, gleich Null machen, und indem man dx' beständig macht; so kommt;

$$(x - y')d^2y' + dx'^2 - dy'^2 = 0 \ldots (2)$$

Bestimmt man x und y durch diese Gleichungen, so wird man dieselben Werthe haben, wie die, welche die Gleichungen (2) und (3) Nr. 260 und 261 für α und β gegeben haben; man wird den Ausdruck von MF durch die Formel

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

berechnen.

Es ist gut zu bemerken, daß die Gleichungen (1) und (2) auch erhalten werden, wenn man, das erste Differential und die zweyte Differentiale des Ausdrucks

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

gleich Null setzt.

In der That, wird der Berührungskreis, da er durch 3 unendlich nahe Puncte auf der vorgegebenen Curve geht, seinen Mittelpunct in einer gleichen Entfernung von jeden dieser Puncte haben; oder da die Coordinaten des erstern x' und y' sind, so muß man diese veränderlichen Größen einmal differentiiren um zum zweyten überzugehen, und zweymal, um zum dritten zu gelangen, ohne daß deswegen die obige Entfernung eine Veränderung erleide; es ist also einleuchtend, daß ihr erstes und zweytes Differential gleich Null seyn müssen.

290.

Das Verfahren wodurch wir zur Gleichung der Abgewickelten gekommen sind, indem wir sie betrachten, als wäre sie durch die aufeinanderfolgende Durchschnitte der

Normalen gebildet, könnte auf die Untersuchung der durch alle grade Linien, welche durch die verschiedenen Puncte der vorgegebenen Curve gezogen sind, berührten Curve, angewendet werden, und die mit der Tangente gegebene Winkel macht, weil es leicht seyn würde die Gleichungen irgend einer dieser graden Linien zu finden. Wir wollen jetzt das allgemeine Problem auflösen, wovon dieses nur ein besonderer Fall ist, und welches man wie folget, ausdrücken kann: Die Gleichung der Curve zu finden, die eine unendliche Menge anderer von einer gegebenen Natur berührt und die dem unterworfen sind, nach einem gewissen Gesetze aufeinander zu folgen.

Um die Auflösung begreiflicher zu machen, werde ich gleich ein Beyspiel nehmen, und mich vorsetzen, die Gleichung der Curve EX (Fig. 41) welche alle Kreise die aus den verschiedenen Puncten der Curve DZ mit einem Radius gleich a beschrieben sind, berührt, zu bestimmen. Es seyen MGO und M'GO' zwey dieser Kreise, welche ihre Mittelpuncte in den Puncten N und N' haben; es ist einleuchtend, daß ihr Durchschnittspunct, um so weniger von der Curve EX entfernt seyn wird, als die Puncten N und N' näher aneinander seyn werden; und daß, indem man diese Puncte zusammenfallen läßt, die der Berührung M und M' mit dem Puncte G zusammenfallen werden: man kann also die berührende Curve EX, als durch die successiven Durchschnitte der berührten Kreise gebildet, betrachten.

Dieses festgesetzt, wird die Gleichung des Kreises

MGO gleich $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$

seyn, indem man durch α und β die Coordinaten AQ und QN der Curve DZ bezeichnet; aber vermittelst der Gleichung

chung dieser Curve, welche ich durch $\beta = f(\alpha)$ vorstellen werde, wird man β aus der vorhergehenden wegschaffen können, welche alsdenn

$$(x - \alpha)^2 + [y - f(\alpha)]^2 = a^2 \text{ (1)}$$

werden wird.

So lange man nur einen Kreis insbesondere betrachtet, muß die Größe α als beständig angesehen werden, und um von diesem Kreise auf den ihm unmittelbar folgenden übergehen zu können, muß man α einen von dem anfänglichen unendlich wenig verschiedenen Werth geben; allein während α sich so verändert, werden die Coordinaten x und y des Puncts G, welcher zugleich beyden Kreisen gemein ist, sich nicht verändern, und dieses wird man ausdrücken indem man die Differentiale der Gleichung (1) in Bezug auf α allein genommen, gleich o macht, woraus resultiren wird

$$(x - \alpha) + [y - f(\alpha)]\, f'(\alpha) = 0 \ldots (2),$$

indem man $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ durch $f'(\alpha)$ vorstellt, und den gemeinschaftlichen Factor $d\alpha$ unterdrückt.

Wenn mar gegenwärtig α zwischen den Gleichungen (1) und (2) eliminirt, so erhält man die Relation, welche die veränderlichen Größen x und y unter sich haben müssen, wie auch die Lage des Puncts N auf der Curve DZ seyn mag, oder welches dasselbe ist, die Gleichung der Curve EX; die alle, nach denBedinguugen der Frage beschriebenen Kreise berührt.

Es sey allgemein $V = 0$ eine Gleichung zwischen x, y und einer willkührlich beständigen Größe α, giebt man dieser beständigen Größe alle mögliche Werthe, so gehen daraus eine Menge Curven hervor, die man betrachten kann als ob sie sich je zwey und zwey hintereinander

schneiden, und in allen diesen Curven zusammengenommen wird die Ordinate y sich auf zweyerley Art verändern, nemlich, indem man von einem Punct zu einem andern in derselben Curve, oder indem man von einer Curve zur andern in Beziehung auf dieselbe Absciſſe übergeht; im ersten Fall verändert sich x allein, und das Differential von y ist $\frac{dy}{dx}dx$, im zweyten Falle ist es α, welche sich verändert, und man hat $\frac{dy}{d\alpha}d\alpha$, zum Differential von y. Aber sobald man einen, zwey hintereinander folgenden Curven gemeinschaftlichen Punct betrachtet, so bleibt y dasselbe für beyde, welches $\frac{dy}{d\alpha}=0$ giebt. Nach dem Vorhergehenden, muß man also y als eine Function von x und von α betrachten, die von der Gleichung $V=0$ abhängt, und man wird um $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{d\alpha}$, zu bestimmen, die beyden folgenden Gleichungen finden:

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dx}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{d\alpha}=0, \text{ (Nr. 79)}$$

Man siehet durch die letzte, daß die Voraussetzung von $\frac{dy}{d\alpha}=0$, $\frac{dV}{d\alpha}=0$, giebt.

Verbindet man diese Gleichung mit $V=0$ zusammen, so wird daraus durch die Elimination von α, die Gleichung der Curve resultiren, welche alle diejenigen berührt die durch $V=0$ vorgestellt werden können.

Man hätte zu demselben Resultat gelangen können, ohne die Betrachtung der succeſſiven Durchschnitte der be-

rührten

rührten Curven) zu gebrauchen. In der That, die berührende Curve hat in irgend einem ihrer Puncte, dieselben Coordinaten x und y und denselben Differentialcoefficient als die der Curven der Gleichung $V = 0$, welche sie in diesem Punct berührt; sie muß also alsdann den Gleichungen $V = 0$ und $\frac{dV}{dx} dx = 0$ genugthun, indem sie α den zukommenden Werth giebt; denn man muß beobachten, daß die Lage des Berührungspunctes nothwendig die berührte Curve particularisirt. Es folgt aus dieser letzten Bemerkung, daß, sobald α sich verändert x und y sich auch verändern müssen und, daß man folglich die Gleichung $V = 0$ differentiiren kann, indem man supponirt, daß x und y Functionen von α sind, welches

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{d\alpha} d\alpha = 0,$$

geben wird, ein Resultat daß in Betrachtung der Gleichung

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy = 0,$$

sich auf $\frac{dV}{d\alpha} = 0$, reducirt. Da die beyden Gleichungen

$$V = 0 \text{ und } \frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

also für jeden Berührungspunct statt finden; so wird man daraus diejenige ziehen, welche dem Ensembel von allen diesen Puncten oder der berührenden Curve zukommt, indem man α eliminirt, davon die Werthe den verschiedenen berührten Curven relativ sind.

Wenn die vorgegebene Gleichung, $V=0$, eine Differentialgleichung der ersten Ordnung wäre, und eine willkührlich beständige Größe einschlösse, so würden sich die hintereinanderfolgenden Curven, welche man erhielte, in-

dem man diese beständigen Größen verändern ließe, nicht schneiden, aber sich berühren; denn indem sie von irgend einer unter ihnen auf die folgende übergienge, würde der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ sich nicht verändern, so wenig wie die Coordinaten x und y. In diesem Fall wird die berührende Curve, von der man die Gleichung erhalten wird, indem man α zwischen

$$V = 0 \text{ und } \frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

eliminirt, mit einer jeden der berührten Curven, eine Berührung der zweyten Ordnung haben. Man wird diese Betrachtung leicht auf Differential-Gleichungen der höhern Ordnungen ausdehnen können.

291.

Das Verfahren wodurch man die beständigen Größen einer Gleichung verändern läßt, ist eins der großen Mittel der Analysis, und es wird mit Eleganz auf geometrische Fragen angewendet, weil es keine Curve giebt, welche man nicht als durch die successiven Durchschnitte einer Folge von Linien von gleicher Natur, hervorgebracht, ansehen könnte. Wir wollen davon noch ein Beyspiel geben, indem wir die Gleichungen der Radlinien (Roulettes) bestimmen, d. h. der Curven, welche durch die Bewegung eines Puncts, der auf eine Curve angenommen, die auf die Circumferenz einer andern Curve zu rollen gezwungen ist, hervorgebracht werden.

Um diese Untersuchung zu erleichtern, wollen wir statt den vorgegebenen Curven zwey Polygone QMG und DZ (Fig. 42) substituiren. Es ist gleich einleuchtend, daß, indem man voraussetzt, daß der beschreibende Punct M, welcher

welcher auf das bewegliche Vieleck genommen ist, sich in den Punct D des unbeweglichen Vielecks befunden habe, der Bogen QM dem Bogen DQ gleich seyn wird. Man wird hierauf leicht gewahr, daß, während die Seite Qq des beweglichen Vielecks, sich um den Punct Q wenden wird, um sich an der Seite QQ′ des unbeweglichen Vielecks anzulegen, der Punct M einen Kreisbogen MM′ beschreibt dessen Centrum im Punct Q, und dessen Radius die Sehne MQ seyn wird. Wenn der Punct q in Q′ angekommen seyn wird, so wird alsdann das bewegliche Vieleck sich um diesen letztern drehen, bis die auf Qq folgende Seite Q′q′, sich auf das unbewegliche Vieleck applicirt haben wird, und der in M′ angekommne Punct M, wird einen neuen Kreisbogen M′M″ beschreiben, welcher zum Radius die Sehne M′Q′ gleich Mq, und zum Mittelpunct den Punct Q′ hat. Es folgt aus diesen Bemerkungen, daß, die Radlinie durch die consecutive Durchschnitte, der auf jedem Puncte der Curve DZ, mit Halbmesser die gleich den Sehnen der Bogen der beweglichen Curve, (welche zwischen diesen Puncten und dem beschreibenden Puncte liegt,) beschriebenen Kreisen, gebildet und sie folglich durch alle diese Kreise berührt werden wird.

Nennt man die Coordinaten der unbeweglichen Curve α, β und γ die Sehne MQ, so wird die Gleichung des Kreises MM′ seyn:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2 \ldots (1)$$

Man muß gegenwärtig beobachten, daß nach Aussage der Frage, β und γ bekannte Functionen von α sind. Dies ist sogleich in Ansehung von β einleuchtend, weil es in α gegeben ist, durch die Gleichung der unbeweglichen Curve DZ. Stellt man in der Folge, durch t, den Bogen DQ

vor, so wird t eine Function von α seyn; allein t drückt auch den Bogen MQ aus, welcher gleich DQ ist, und die Natur der beweglichen Curve QMG, wird jederzeit eine Gleichung zwischen diesem Bogen, und der durch γ vorgestellten Sehne, an die Hand geben; man wird also begreifen können, daß β und γ in α, vermittelst der eben angezeigten Relationen bestimmt, sind.

Differentiirt man die Gleichung (1) in Bezug auf α, bloß um zum Kreis M′M″ welcher auf MM′ folgt überzugehen, so wird kommen:

$$-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=\gamma\frac{d\gamma}{d\alpha}\ldots(2);$$

und eliminirt man α zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung, so wird man die Gleichung der Radlinie haben. Da indessen es am öftersten vorfallen wird, daß die Relation zwischen den Bogen QM und seine Sehne, transcendent seyn wird, eben so wie die, welche zwischen dem Bogen DQ und den Coordinaten der Curve DZ existiren muß, so wird die Eliminirung unmöglich seyn, und es wird bequemer seyn, aus den Gleichungen (1) und (2) die Werthe von x und y in α, β und γ zu ziehen. Indem man die nöthigen Berechnungen ausführt, und dt^2 statt $d\alpha^2 + d\beta^2$ setzt, wird man leicht finden:

$$x=\alpha-\frac{\gamma d\gamma d\alpha+\gamma d\beta\sqrt{dt^2-d\gamma^2}}{dt^2}$$

$$y=\beta-\frac{\gamma d\gamma d\beta-\gamma d\alpha\sqrt{dt^2-d\gamma^2}}{dt^2}$$

Man wird die Anwendung dieser Formeln erleichtern, indem man, so viel als möglich die Größen α, β und γ, durch den Bogen t welcher der beweglichen und unbeweglichen Curve gemein ist, ausdrückt.

292.

Wenn wir voraussetzen, daß die bewegliche Curve ein Kreis, und die unbewegliche Curve die Abscissenaxe selbst sey, so wird die alsdenn beschriebene Radlinie die gewöhnliche Cycloide seyn (Nr. 211). Da in diesem Falle die Ordinate β der unbeweglichen Curve stets Null ist, so hat man $d\beta = 0$, AQ (Fig. 33) wird gleich α, welches

$$a = t = MQ$$

giebt; behält man die Nenner der citirten Nr. so wird die Sehne MQ oder γ durch

$$\sqrt{2r.QN} = \sqrt{2r^2\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)},$$

ausgedrückt werden, woraus man ziehen wird:

$$d\gamma = \frac{r\,dt\sin\frac{t}{r}}{\sqrt{2r\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)}}.$$

Substituirt man diese Werthe in diejenigen von x und y, welche die Voraussetzung von

$$\beta = 0, \quad d\beta = 0, \quad \alpha = t, \quad d\alpha = dt, \text{ auf}$$

$$x = \alpha - \frac{\gamma d\gamma}{dt}, \quad y = \beta - \frac{\gamma\sqrt{dt^2 - d\gamma'^2}}{dt},$$

reducirt, so wird man finden

$$x = t - r\sin\frac{t}{r}, \quad y = r\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right).$$

Wir haben vorausgesetzt, daß der beschreibende Punct auf der Circumferenz des beschreibenden Kreises wäre, aber wenn er, es sey innerhalb, oder außerhalb dieses Kreises, gesetzt würde, so würden die Formeln wenig mehr zusammengesetzter werden. Es ist außerdem sehr sichtbar,

daß

daß man auf diesen Umstand Rücksicht nehmen würde, indem man statt der Sehne MQ die Distanz MQ (Fig. 43) substituirte, welche alsdann der Radius des kleinen Kreisbogens, welcher durch den Punct m um den Punct Q beschrieben wird, seyn würde.

Wenn man die Distanz mO, in welcher der beschreibende Punct sich vom Mittelpunct des beschreibenden Kreises befindet, p nennt, und auf MO, die senkrechte NQ zieht, indem man fortfährt den Bogen MQ, t zu nennen, so hat man

$$NQ = r \sin. \frac{t}{r}, \quad NO = r \cos \frac{t}{r}, \quad MQ = r = \gamma = \sqrt{\left(p - r\cos \frac{t}{r}\right)^2 + \left(r \sin. \frac{t}{r}\right)^2}$$

$$\gamma d\gamma = pdt \sin \frac{t}{r}, \quad \gamma \sqrt{dt^2 - d\gamma^2} = dt \sqrt{r - p\cos \frac{t}{r}},$$

woraus resultiren wird

$$x = t - p \sin \frac{t}{r}, \quad y = r - p\cos \frac{t}{r}.$$

Wenn der Punct M außerhalb des beschreibenden Kreises ist, so geht die beschriebene Curve unter die Linie AB, und man nennt sie: abgekürzte Cycloide, weil ihre Höhe, beträchtlicher als die der gewöhnlichen Cycloide ist, man würde sie verlängerte Cycloide nennen, wenn der Punct M im Innern dieses Kreises befindlich wäre, und alsdenn würde sie die Linie AB nicht erreichen.

Die Radlinien bieten noch eine Art Curven dar, womit sich die Geometer ganz besonders beschäftigt haben; ich spreche von den Epicycloiden für welche die beweglichen und unbeweglichen Curven, beyde, Kreise sind. Indem wir durch q den Radius des letztern bezeichnen,

dessen

dessen Mittelpunct man auf die Abscissenlinie AB supponirt, so werden seine Coordinaten α und β durch

$$q\left(1 - \cos\frac{t}{q}\right) \text{ und } q \sin\frac{t}{q}$$

ausgedrückt werden.

Substituiren wir diese Werthe, so wie ihre Differentialien in die von x und y; und behalten mehrerer Allgemeinheit wegen, die oben gegebenen Ausdrücke von γ und $d\gamma$, in Bezug auf dem Fall, wo der beschreibende Punct außerhalb der Circumferenz des beweglichen Kreises befindlich ist, bey, und lassen die Produkte der Sinus und Cosinus, vermittelst der bekannten Formeln, welche die Werthe dieser Produkte durch den Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz der Bogen geben, weg, so werden wir nach geschehenen Reductionen finden:

$$x = q - (q + r)\cos\frac{t}{q} + p\cos\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)t,$$

$$y = (q + r)\sin\frac{t}{q} - p\sin\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)t,$$

So oft die Radii q und r unter einander wie Zahl zu Zahl seyn werden, wird man die Relationen von

$$\sin\frac{t}{r} \text{ und } \sin\frac{t}{q}, \quad \cos\frac{t}{r} \text{ und } \cos\frac{t}{q}$$

durch algebraische Gleichungen ausdrücken können, und vermittelst ihrer diese Größen aus den vorhergehenden Gleichungen eliminiren; wenn das Resultat in x und y algebraisch ist, so wird die Radlinie nicht transcendent seyn.

Setzen wir noch voraus, daß, da die unbewegliche Curve beliebig bleibt, die bewegliche Curve eine grade Linie sey, und daß man den beschreibenden Punct auf diese Linie selbst annimmt; so wird die Radlinie alsdann die developpirte der unbeweglichen Curve werden, und man

wird

wird $\gamma = t$, bekommen woraus resultirt

$$x = \alpha - \frac{td\alpha}{dt}, \qquad y = \beta - \frac{td\beta}{dt}.$$

Eliminirt man α, β und t, mit Hülfe dieser Gleichungen, und der Relationen unter α, β und t, welche von der Gleichung der vorgegebenen Curve abgeleitet sind, so wird man zur Gleichung der Developpirten gelangen.

293.

Das Vorhergehende giebt die Auflösung der umgekehrten Aufgabe der Abgewickelten; ich will zeigen wie man dieselben Resultate bekommen würde, indem man sich der Gleichungen

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = a^2 \text{ (Nr. 260)}$$

$$(x' - \alpha) dx' + (y' - \beta) dy = 0,$$

$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta) d^2y' = 0 \text{ (Nr. 264)}$$

bediente.

Wenn die Coordinaten der Abgewickelten, Functionen von den der Developpirten sind, so können die zweyten auch als Functionen der ersten angesehen werden. Differentiirt man unter diesem Gesichtspuncte die obige beyde erste Gleichungen, so wird man zu gleicher Zeit die Größen x', y', α, β und a verändern lassen; aber die mit dx' und dy' behafteten Glieder werden im ersten Resultat verschwinden, Kraft der zweyten Gleichung, und im zweyten, Kraft der dritten; man wird also haben

$$-(x' - \alpha) d\alpha - (y' - \beta) d\beta = a da,$$

$$d\alpha\, dx' + d\beta\, dy' = 0$$

nimmt man den Werth von dy' im letzten Resultat, um ihn im zweyten der vorhergehenden Gleichungen zu substituiren, so wird kommen

$(x' - \alpha)$

$$(x' - \alpha) d\beta - (y' - \beta) d\alpha = 0.$$

Diese Gleichung verbunden mit

$$-(x' - \alpha) d\alpha - (y' - \beta) = ada,$$

wird Werthe von x' und y' geben, die, wenn man t an die Stelle von a gesetzt haben wird, dieselben seyn werden als die von x und y, die zuletzt in der vorhergehenden Nr. gefunden sind, weil, indem man sie in der Gleichung

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = t^2$$

substituirt,

$$dt^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

kommen wird, man wird also nicht t sondern nur ihr Differential haben. Dieser Umstand erklärt sich, indem man bemerkt, daß einerley Abgewickelte eine unendliche Anzahl Developpirte hervorbringen kann, weil man den beschreibenden Punct, auf der Graden beweglichen nehmen kann wo man will, und folglich

$$\gamma = t + p$$

machen kann, welches geben wird

$$d\gamma = dt,$$

und nichts in der Gestalt der Werthe von x und y verändern wird, in welchen man an der Stelle von γ, $t + p$ setzen muß.

Man könnte auch die Frage der Radlinien umkehren, indem man sich vornimmt, die Gleichung der unbeweglichen Curve zu bestimmen, wenn die, der Radlinie und der beweglichen Curve gegeben sind, oder auch, die dieser letzten zu finden, wenn man die zwey andern kennt. Ich werde mich nicht in diese Details einlassen, und mir nur begnügen zu bemerken, daß die Umdrehung der Curve auf eine andre, so wie die Entwickelung

ckelung ein Mittel ist, eine beliebige Curve hervorzubringen; den La Hire hat synthetisch in den Pariser Memoiren der Akademie (Jahr 1706) bewiesen, und man würde es auch durch die vorhergehende Analysis sehen, daß, wenn eine beliebige Curve gegeben ist, man immer eine finden kann, die, wenn sie sich auf eine andre, auch gegebene Curve wälzt, die erstere, durch einen ihrer Puncte, hervorbringt.

Fünftes Kapitel.

Theorie der krummen Oberflächen und der Curven von doppelter Krümmung.

Die Theorie der krummen Oberflächen und der Curven von doppelter Krümmung, die ich in dieses Kapitel vortragen werde, gehört fast ganz Herrn Monge, Clairaut und vorzüglich Euler, waren zu wichtige Resultate über diese Materie gekommen; Aber Monge indem er sie so zu sagen, seiner Seits wieder erfand, hat ihnen durch die Eleganz der Analysis von welcher er Gebrauch gemacht hat, um dahin zu gelangen, eine neue Gestalt gegeben, und er hat dem, was schon vor ihm bekannt, war, ein beträchtliches hinzugefügt. Ich glaube, den, wenig an diese Art von Betrachtungen geübten Lesern, preveniren zu müssen, daß sie in ein kleines Werk, welches ich vor einigen Jahren unter dem Titel: Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes*) herausgegeben habe

*) Von diesem kleinen, selbst für jedem Baumeister, Zeichner u. s. w. sehr nützliche Werk, erscheint bald die schon längst ver-

habe, die vorläufigen Begriffe finden werden, die zum Verständniß des Folgenden unentbehrlich ist, und daß ich zu den Nr. dieses Buchs zurückweisen werde, indem ich die Nr. mit dem vorgesetzten Buchstabe E citire, um sie von den in der gegenwärtigen Abhandlung zu unterscheiden.

294.

Gleichungen der Ebene und der geraden Linie.

Die bequemste Art, die Lage eines beliebigen Puncts M des Raums, (Fig. 44), festzusetzn, eist, ihm zuerst auf einer der Lage nach gegebenen Ebene BAC zu projectiren, indem man auf dieser Ebene die Perpendiculare MM' niederläßt, und nachher die Projection M' auf zwey, untereinander perpendiculare Axen, AB und AC, durch die Coordinaten AP und PM', zu beziehen. Dieses läuft darauf hinaus den Punct selbst auf den drey Ebenen BAC, BAD und DAC, die untereinander perpendicular sind zu beziehen; denn die Coordinaten AP und PM' obgleich in der Ebene BAC liegend, stellen die Entfernungen MM''' und MM'' des vorgegebenen Puncts M, von den beyden andern Ebenen BAC und BAD, vor. Die graden Linien AB, AC und AD nach welchen die Coordinirten Ebenen BAC, DAC und BAD sich je zwey und zwey schneiden, heißen Axen der Coordinaten, und man unterscheidet sie unter-

versprochene Uebersetzung. Der vollständige Titel des Originals ist: Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes; (ou Elémens de Géométrie descriptive). Par Silvestre-François La croix. Paris 1795. 8. G.

untereinander durch den Buchstaben, welcher die mit ihnen parallele Coordinate bezeichnet; wenn man also

$$AP = x, \quad PM' = y \text{ und } MM' = z,$$

macht, so wird die Linie AB die Axe der xen, die Linie AC, die Axe der y's und die Linie AD die Axe der z's seyn.

Die coordinirten Ebenen bekommen selbst ähnliche Benennungen; die Ebene BAC wird die Ebene der xen und y's heißen, weil sie die Coordinaten x und y enthält. Wenn die Projection M'' des Punctes M, auf der Ebene BAD, auf den beyden Axen AB und AD, durch die Coordinate

$$AP = x \text{ und } PM'' = MM' = z$$

bezogen ist, so wird diese Ebene unter den Nahmen Ebene der xen und z's angedeutet werden. Wenn endlich die Projection M''', des Punctes M, auf der Ebene DAC, auf den Axen AC und AD, durch die Coordinaten

$$AR = PM' = y \text{ und } RM''' = M'M = z$$

bezogen ist, so wird diese Ebene unter den Nahmen Ebene der y's und z's angezeigt werden. Man muß bemerken:

1) daß die Coordinaten y und z zu gleicher Zeit für alle Puncte der Axe der xen AB, Null sind; so daß es sich eben so mit x und z in Beziehung auf der Axe der y's, AC, und der xen und y's in Beziehung auf der Axe von z, BD, verhält.

2) Daß für alle Puncte der Ebene BAC, die Coordinate z Null ist, und daß sie einen beständigen Werth in allen Puncten einer beliebigen mit der ersten parallelen Ebene hat; dergestalt, daß diese Gleichung $z = c$, wenn sie allein ist, und man keine andere Bestimmung in Beziehung auf den beyden bleibenden Coordinaten x und y hat,

hat, angesehen werden muß, als ob sie alle Puncte der Ebene, die parallel mit BAC, in einer c gleichen Entfernung geführt ist, andeutete. Man wird auf eben der Art sehen, daß y für alle Puncte der Ebene BAD, Null ist, und daß die Gleichung der Ebene, die man parallel mit dieser ersten, in einer Entfernung b, führen würde, $y = b$ seyn würde.

Wenn man die beyde Gleichungen $z = c$ und $y = b$ zusammen vereinigt, d. h. wenn man voraussetzt, daß sie zu gleicher Zeit Statt finden, so werden sie eine grade Linie bezeichnen, die parallel mit der Axe der xen, und durch den Punct der Ebene von y und z geführt ist, deren Coordinaten a und b sind. Es ist leicht zu sehen, daß diese grade Linie, als der Durchschnitt zweyer Ebenen, BAC, BAD betrachtet werden kann.

Endlich, wird in der Ebene DAC die Coordinate x immer Null seyn, und $x = a$ wird die Gleichung der Ebene parallel mit dieser ersten, in einer a gleichen Entfernung geführt, seyn. Wenn die drey Gleichungen

$$z = c, \qquad y = b, \qquad x = a$$

vereiniget sind, so können sie nur dem Puncte angehören der sich im Durchschnitt der drey Ebenen, die respective mit einer jeden der coordinirten Ebenen parallel sind, befindet.

295.

Wir wollen jetzt untersuchen, was eine einzige Gleichung, zwischen zwey von den drey unbestimmten Größen x, y und z bedeuten würde, und als B. $z = Ax$ nehmen. Wir werden sogleich sehen, daß diese Gleichung einer graden Linie AN'' (Fig. 45) die in der Ebene der xen und z's BAD gezogen ist, gehört. Sie hat aber noch einen aus-

gedehnteren Sinn; denn wenn man begreift, daß die grade Linie AN'' sich, parallel mit sich selbst, längst der Axe der y's bewegt, so wird AC in welcher Lage sie auch einhält, die Ordinate z, oder M'm, in einem beliebigen Punct M' genommen, der auf der graden Linie PM' liegt, die parallel mit AC ist, und auf welcher x beständig ist, der correspondirenden Ordinate Pm'', in der Ebene BAD, gleich seyn; überdem beschreibt die grade Linie AN'' durch die Bewegung welche wir ihr supponiren, die Ebene N''AC, welche durch die graden Linien AN'' und AC geht; man wird also für alle Puncte dieser Ebene $z = Ax$ haben. Man würde analoge Folgerungen für die andern coordinirten Ebenen finden, indem man Gleichungen zwischen die unbestimmten Größen, welche sie enthalten, nimmt; es ist aber besser, wenn man gleich zu einem allgemeinern Fall übergeht und die Gleichung $z = Ax + By$ betrachtet.

Wenn man darin $y = 0$ macht, so wird kommen $z = Ax$, und wir werden daraus schließen, daß die grade Linie AN'', die in dieser letzten begriffen ist, alle Puncte enthält, welche die durch die Gleichung $z = Ax + By$ vorgestellten Oberfläche mit der coordinirten Ebene BAD gemein hat, auf welcher y immer Null ist, oder, welches auf eins hinausläuft, der Durchschnitt dieser Ebene mit der vorgegebenen Oberfläche ist.

Macht man $x=0$, so erhält man $z = By$, eine Gleichung, welcher einer graden Linie AN'' angehört, die durch den Ursprung A gezogen ist, in der Ebene AC, und welche der Durchschnitt dieser Ebene, mit der durch die Gleichung $z = Ax + By$ vorgestellten Oberfläche ist.

Wenn man jetzt begreift, daß der Winkel N'''AR sich der Ebene DAC parallel bewegt, dergestalt, daß sein Scheitel stets auf der graden Linie AN'' ist, und daß die Seite

AR parallel mit AC bleibt, so wird diese Seite die Ebene N'AC beschreiben, und wenn AN''' in einer beliebigen Lage m''M gekommen seyn wird, so wird der Theil Mm der Ordinate M'M gleich und parallel mit Rm''' seyn, und man wird folglich haben

$$M'M = Pm'' + Rm''' = Ax + By = z.$$

Wenn aber die, durch der graden Linie AN''' erzeugte Oberfläche, nichts anders ist als die Ebene die durch die graden Linien AN'' und AN''' geht; so wird die Gleichung $z = Ax + By$ also die Gleichung dieser Ebene seyn.

Wenn die vorgegebene Ebene, statt durch den Ursprung A zu gehen, sich in einer Lage G''EG''' befände, welche durch die Linien EG'', EG''' respective parallel mit AN'' und AN''', bestimmt wäre, so würde sie parallel mit N'AN'' seyn, und wenn man die Ordinate dieser Ebene bis zur Begegnung der erstern verlängerte, so würde man haben

$$M'N = M'N + MN = M'N + AE,$$

nennt man also D, die Entfernung AE, und z die Ordinate M'N, so würde nach dem Vorhergehenden,

$$z = Ax + By + D$$

kommen. Dieses ist die Gleichung einer Ebene, die in einer beliebigen Lage geführt ist: es ist leicht sich zu überzeugen, daß sie die allgemeine Gleichung des ersten Grades zu drey unbestimmten Größen enthält; denn diese letztere kann nur von der Gestalt

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

seyn, und indem man sie durch γ theilt, wird sie zur ersten werden, wenn man

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = A, \quad -\frac{\beta}{\gamma} = B, \quad -\frac{\delta}{\gamma} = D,$$

festgesetzt haben wird.

Man sieht also, daß der Coefficient γ nichts der Allgemeinheit der Gleichung hinzufügt; ich werde ihm dem-

ohnerachtet beybehalten, um die Formeln mehr symetrisch zu machen, und ich werde die Gleichung einer beliebigen Ebene durch

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

vorstellen; man muß sich aber erinnern, daß in allen Resultaten, eine der beständigen Größen seyn wird, die man gleich der Einheit, annehmen, oder durch besondre Bedingungen bestimmen kann.

296.

Macht man in den Gleichungen dieser Ebene successive x, y und z Null, so wird man sehen, daß sie die der y's und z's in einer Linie begegnet, deren Gleichung

$$By + Cz + D = 0$$

ist; die der xen und z's in einer Linie deren Gleichung

$$Ax + Cz + D = 0$$

ist, und endlich die der xen und y's in einer Linie, die zur Gleichung

$$Ax + By + D = 0$$ hat.

Da die Ausdehnung dieser Ebenen unbegränzt ist, so muß man begreifen, daß die Ebene $G''EG'''$ hinter den coordinirten Ebenen BAD, DAC, verlängert ist, sie wird alsdann die Ebene BAC begegnen, und unter ihr weggehen. Alle diese Umstände kann man in ihrer Gleichung lesen, indem man bemerkt, daß eine jede der unbestimmten Größen x, y und z, positiv und negativ genommen seyn muß, und daß, wenn die Theile AB, AC und AD der Coordinatenaxen mit den positiven Werthen dieser Größen übereinstimmen, die entgegengesetzten Theile Ab, Ac und Ad mit den negativen Werthen übereinstimmen werden. Dieses kann unmittelbar durch den Lauf der Linien bewiesen werden, die sich in den Ebenen BAC, BAD und

CAD

CAD befinden; man würde noch dahin gelangen, wenn man eine jede dieser Ebenen, parallel mit sich selbst, versetzt, dergestalt, daß man die negativen Ordinaten die auf ihr perpendicular sind, positiv macht, und man würde alsdann, so, wie dieses in Rücksicht der Linien Nr. 202 geschehen ist, raisonniren.

Es folgt daraus, daß man unterscheiden kann, in welchen der acht körperlichen Winkeln, welche die coordinirten Ebenen um den Punct A bilden, ein vorgegebener Punct fällt, und zwar mittelst der Zeichen mit welchen ihre dinaten behaftet sind; es ist daher hinreichend zu bemerken, daß wenn man $+x$, $+y$, $+z$, in den durch die Ebenen BAC, BAD und DAC (Fig. 44) gebildeten Winkel nimmt, man haben wird

$+x$,	$+y$,	$-z$	im Winkel BAC,	CAd,	BAd
$+x$,	$-y$,	$+z$	im Winkel BAc,	cAD,	DAB
$-x$,	$+y$,	$+z$	im Winkel bAC,	CAD,	bAD
$+x$,	$-y$,	$-z$	im Winkel BAc,	cAd,	BAd
$-x$,	$-y$,	$+z$	im Winkel bAc,	cAD,	bAD
$-x$,	$+y$,	$-z$	im Winkel bAC,	CAd,	bAd
$-x$,	$-y$,	$-z$	im Winkel bAc,	cAd,	bAd

297.

Eine grade Linie ist allemal gegeben, wenn man zwey Ebenen kennt in welchen sie liegt und deren Durchschnitt sie alsdann ist, weil die Coordinaten ihrer Puncte den beyden Gleichungen dieser Ebenen gemein sind. Es seyen also

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots (1)$$

$$A'x + B'y + C'z = D' = 0 \ldots (2)$$

die Gleichungen dieser gegebenen Ebenen; betrachtet man die unbestimmten Größen x, y und z als hätten sie den-

 selben

selben Werth in diesen zwey Gleichungen, so wird nur eine übrig bleiben die man willkührlich nehmen kann, und die beyde andern der ersten gemäß berechnet, werden die Lage der verschiedenen Puncte der vorgegebenen graden Linie anzeigen.

Die Gleichungen (1) und (2) sind nicht die einzigen, welche die vorgegebene grade Linie vorstellen können, denn sie befindet sich in eine unendliche Anzahl von verschiedenen Ebenen; man wählt aber gewöhnlich, unter allen diesen Gleichungen die sie haben könnte, die, welche nur zwey der Coordinaten x, y und z enthalten.

Eliminirt man successive x, y und z, zwischen die Gleichungen (1) und (2), so wird man die drey folgenden erhalten

$$(AB' - A'B)y - (CA' - C'A)z + AD' - A'D = 0$$
$$(BC' - B'C)z - (AB' - A'B)x + BD' - B'D = 0$$
$$(CA' - C'A)x - (BC' - B'C)y + CD' - C'D = 0$$

welche werden

$$\gamma y - \beta z + \delta = 0 \ldots (3)$$
$$\alpha z - \gamma x + \varepsilon = 0 \ldots (4)$$
$$\beta x - \alpha y + \zeta = 0 \ldots (5)$$

indem man zur Verkürzung

$$AB' - A'B = \gamma, \quad CA' - C'A = \beta, \quad BC' - B'C = \alpha$$
$$AD' - A'D = \delta, \quad BD' - B'D = \varepsilon, \quad CD' - C'D = \zeta$$

macht. Irgend zwey von diesen Gleichungen, sind hinreichend um die Gleichungen (1) und (2) zu ersetzen, und enthalten implicite die dritte. In Wahrheit, wenn man die Gleichung (3) durch α, die Gleichung (4) durch β, die Gleichung (5) durch γ multiplicirt, und die Producte addirt, so wird man finden

$$\alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta = 0,$$

ein Resultat, daß die Substitution der Werthe von α, β,

γ, δ, ε

γ, δ, ε und ζ identisch machen wird, oder was die Bedingung, welche diese Größen erfüllen müssen, ausdrücken wird, damit die Gleichungen (3), (4) und (5), die a priori gegeben sind, der nemlichen graden Linie gehören können.

Die Gleichung (3) die die Relation enthält, welche untereinander die Coordinaten y und z, für alle Puncte der vorgegebenen graden Linie, haben müssen, gehört dem Ensembel der Projectionen dieser Puncte, auf die Ebene von y und z, und ist folglich die Gleichung der Projection der vorgegebenen graden Linie auf diese Ebene (E. Nr. 4). Man wird auf eben der Art sehen, daß die Gleichung (4), der Projection dieser graden Linie, auf die Ebene der xen und z's gehört, und daß endlich die Gleichung (5) die, ihrer Projection auf die Ebene der xen und y's ist. Wenn zwey dieser beliebigen Projectionen gegeben sind, so ist die grade Linie gänzlich bestimmt; dieses ist durch die vorhergehende Gleichung einleuchtend, und weil die vorgegebene grade Linie nichts anders als der Durchschnitt von zwey beliebigen dieser projectirten Ebenen (E. Nr. 5) ist, Ebenen, deren Gleichung dieselbe ist als die, der Projection auf welcher sie errichtet sind.

298.

Wenn die allgemeine Gleichung der Ebene nicht mehr als drey nothwendige beständige Größen enthält, so wird eine ähnliche Anzahl Bedingungen hinreichen, sie zu particularisiren.

Wir wollen jetzt successive diejenigen von diesen Bedingungen, untersuchen, welche sich am häufigsten begegnen, und werden zu gleicher Zeit die analogen Fragen, in Beziehung auf den graden Linien, abhandeln.

Wir wollen uns zuerst vornehmen eine Ebene durch drey Puncte gehen zu lassen, deren Coordinaten x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''' sind; wir wollen successive x', x'', x''', statt x; y', y'', y''', statt y; und z', z'', z''', statt z, in der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

setzen, und es werden die drey folgende Gleichungen kommen:

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0, \end{aligned}$$

vermittelst, welche man die Größen $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ bestimmen wird, und man wird finden

$$\frac{A}{D} = \frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{B}{D} = \frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(x'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man die Gleichungen der Projectionen einer graden Linie, die durch zwey gegebenen Puncte geht, bestimmen wollte, man es auf einer analogen Art bewerkstelligen könnte, indem man die Coordinaten dieser Puncte in den allgemeinen Gleichungen

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

substituirt, und man würde folglich finden

$$x - x' = \frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'); \quad y - y' = \frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z') \text{ (Nr. 197)}$$

299.

Um zu erkennen, wenn zwey gegebene Linien sich in einerley Ebene befinden, oder, was einerley ist, sich schneiden, so muß man gewiß seyn, ob die unbestimmten Größen x, y und z, den vier Gleichungen der Projectionen dieser graden Linien (E Nr. 18) gemeinschaftlich seyn können. Es ist aber einleuchtend, daß, wenn man x, y und z eliminirt, eine Gleichung bleiben wird, welche die Bedingung, ohne welche die Gleichung der vorgegebenen graden Linie nicht in denselben Punct statt finden würde, ausdrücken wird. Wir wollen also durch

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\}$$

die Gleichungen dieser graden Linien vorstellen, und werden auf der Stelle daraus ziehen

$$az + \alpha = a'z + \alpha', \qquad bz + \beta = b'z + \beta',$$

und eliminirt man z so wird kommen

$$(\alpha' - \alpha)\ (b' - h) - (\beta' - \beta)\ (a' - a) = o.$$

300.

Zwey parallele Ebenen haben ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte mit einer jeden coordinirten Ebene, respective unter sich parallel (E Nr. 15); wenn aber

$$Ax + By + Cz + D = o, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = o$$

die Gleichungen dieser beyden Ebenen vorstellen, so werden ihre respective gemeinschaftlichen Durchschnitte, mit den Ebenen der xen und z's, und der y's und z's zu Gleichungen

$$Ax + Cz + D = o, \qquad A'x + C'z + D' = o,$$

$$By + Cz + D = o, \qquad B'y + C'z + D' = o$$

ha=

haben, und nicht eher je zwey und zwey parallel seyn, bis man haben wird

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'} \text{ (Nr. 196).}$$

Zieht man aus diesen letztern Werthen, die Werthe von A' und B', so wird man zur Gleichung der mit der ersten parallelen Ebene,

$$\frac{C'}{C}(Ax + By + Cz) + D' = 0, \text{ haben.}$$

Es bleibt D' in diesem Resultate noch zu bestimmen übrig, und wenn man voraussetzt, daß die gesuchte Ebene durch einen Punct gehen soll, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, so wird man haben

$$\frac{C'}{C}(Ax' + By' + Cz') + D' = 0;$$

zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so wird D' verschwinden, und dividirt man alsdann durch $\frac{C'}{C}$ so wird kommen

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Es ist nicht, zu ungelegener Zeit zu bemerken, daß, wenn man A, B, C als beliebige Größen betrachtet, die obige Gleichung allen Ebenen, die durch den vorgegebenen Punct gehen, gemein seyn wird.

Weil zwey grade Linien parallel sind, wenn ihre Projectionen auf einer jeden der coordinirten Ebenen respective parallel (E Nr. 20) sind, so werden ihre Gleichungen, in diesen Fall, von der Gestalt

$$\left.\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x = az + \alpha' \\ y = bz + \beta' \end{matrix}\right\}$$

seyn.

Wenn

Wenn die zweyte durch den Punct gehen soll dessen Coordinaten x', y' und z sind, so wird man, um α und β zu bestimmen die Gleichungen

$$x' = az' + \alpha', \text{ und } y' = bz' + \beta'$$

haben, woraus man ziehen wird, wenn man so wie jetzt zu Werke geht

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z').$$

301.

Um die Gleichung einer auf einer gegebenen graden Linie perpendicularen Ebene zu finden, so muß man sich erinnern, daß die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebene, mit einer jeden der coordinirten Ebene auf den Projectionen der gegebenen graden Linie (E Nr. 32) perpendicular sind. Es seyn

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

die Gleichungen dieser graden Linien, und

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

die, der gesuchten Ebene; die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser letzten auf der Ebene der xen und z's und der y's und z's werden durch

$$Ax + Cz + D = 0 \text{ oder } x = -\frac{Cz}{A} - \frac{D}{A}$$

$$By + Cz + D = 0 \text{ oder } y = -\frac{Cz}{B} - \frac{D}{B}$$

vorgestellt werden, und damit diese graden Linien perpendicular auf den Projectionen der gegebenen graden Linie sind, so muß man haben

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}, \text{ (Nr. 199).}$$

Substituirt man die Werthe von A und B, die aus diesen

sen Gleichungen gezogen sind, in die Gleichung der gesuchten Ebene, so wird man haben

$$C(ax + by + z) + D = 0;$$

und wenn diese Ebene durch den Punct dessen Coordinaten x', y' und z' sind, gehen soll, so wird ihre Gleichung $a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0$ werden.

Wenn die Gleichung der Ebene gegeben wäre, und man die Gleichung der graden Linie, die auf ihr perpendicular ist, forderte, so müßte man alsdann an der Stelle von a und b, die hier oben gegebene Werthe, setzen; es würde kommen

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \qquad y - y' = \frac{B}{C}(z - z')$$

für die Gleichungen der graden Linie, perpendicular auf der Ebene die durch

$$Ax + By + Cz + D$$

vorgestellt, und durch den Punct zu gehen, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, unterworfen ist.

302.

Die Entfernung des Punctes M (Fig. 44) dessen Coordinaten x, y und z, beym Ursprung A sind, hat zum Ausdruck

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (E Nr. 24).}$$

Dieses führt uns natürlich zur Gleichung der Kugel-Oberfläche; denn alle, in ihr enthaltenen Puncte müssen gleich weit von ihrem Mittelpunct entfernt seyn, und wenn man annimmt, daß der Mittelpunct, selbst beym Ursprung der Coordinaten ist, so wird die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

für einen beliebigen Punct der vorgegebenen Oberfläche, statt finden.

Wenn

Wenn die Coordinaten des Mittelpuncts x', y' und z' seyn werden, so wird man haben

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

bezeichnet m diesen Punct und nimmt man

$$PO = pm', \; M'N = m'm$$

so werden die rechtwinkligen Dreyecke $m'OM'$ und mNM geben

$m'M'^2 = m'O^2 = M'O^2$, $mM^2 = mN^2 + MN^2$; aber $m'O = x - x'$ $M'O = y - y'$, $MN = z - z'$, $mN = m'M'$, und folglich wird die Entfernung beyder Puncte m und M, zum Ausdruck haben

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y - y')^2 - (z - z')^2}.$$

303.

Das Vorhergehende, führt uns auf eine sehr einfache Art, zum Ausdruck vom Cosinus des Winkels, welchen untereinander zwey gegebene grade Linien machen. Es seyn

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = b(z - z') \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - x' = a'(z - z') \\ y - y' = b'(z - z') \end{array}\right\}$$

die Gleichungen der Projectionen dieser graden Linien, die sich in dem Punct schneiden, dessen Coordinaten x', y' und z' sind; wenn man sich einbildet, daß sie sich parallel mit sich selbst bewegen, bis daß ihr Durchschnittspunct sich beym Ursprunge befindet, so wird ihr Winkel sich nicht verändern und die obigen Gleichungen werden sich auf

$$\left.\begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array}\right\} \text{ reduciren.}$$

Wir wollen jetzt eine Kugel annehmen die ihren Mittelpunct beym Ursprunge hat, und deren Radius durch r vor-

vorgestellt ist; so wird die Entfernung der Puncte, wo ihre Oberfläche eine jede der Seiten des gesuchten Winkels schneiden wird, ohnfehlbar die Sehne dieses Winkels seyn. Man wird die Coordinaten des Begegnungspunctes der ersten graden Linie mit der Kugel-Oberfläche finden, indem man x, y und z durch die Gleichungen dieser graden Linien, und durch die der Kugel bestimmt; und folglich haben

$$x = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$z = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

nennt man x', y' und z', die Coordinaten des Begegnungspunctes der zweyten graden Linie mit der Kugel-Oberfläche, so wird man auf eben die Art haben

$$x' = \frac{a'r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad y' = \frac{b'r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},$$

$$z' = \frac{r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

Der Ausdruck des Quadrats der Entfernung dieses Punctes vom vorhergehenden, wird seyn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

setzt man darin an der Stelle von $x - x'$, $y - y'$ und $z - z'$ ihre Werthe, so wird man nach den Reductionen zum Resultat finden,

$$r^2 \left(2 - \frac{2(1 + aa' + bb')}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)\ (1 + a'^2 + b'^2)}} \right)$$

Man weiß aber, daß das Quadrat der Sehne eines beliebigen Winkels V, gleich ist dem Product des sinusversus multiplicirt durch den Durchmesser; man wird also

$$2(1 - \cos V) = 2 - 2\cos V$$

für

für den Werth dieses Quadrats haben: vergleicht man dieses mit den weiter oben gefundenen Ausdruck, worin man $r = 1$ machen wird, so wird kommen

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Es ist leicht, davon abzuleiten

$$\sin V = \frac{\sqrt{(a'b - ab')^2 + (a' - a)^2 + (b - b')^2}}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Damit die zwey vorgegebenen graden Linien perpendicular sind, müßte man haben $\cos V = 0$, und folglich

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

304.

Der Cosinus des Winkels den zwey gegebene Ebenen untereinander machen, leitet sich unmittelbar vom Ausdruck den man so eben gefunden hat ab, den dieser Winkel ist gleich dem, welchen zwey grade Linie bilden; die perpendicular auf jedem der vorgegebenen Ebenen, durch einen beliebigen Punct ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts (E Nr. 46) geführt sind. Wir wollen die Gleichungen dieser Ebene durch

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad Ax' + By' + Dz' + D' = 0$$

vorstellen; wenn man annimmt, daß sie sich parallel mit sich selbst bewegen, bis, daß sie zum Ursprung der Coordinaten gelangt sind, so wird ihr Winkel sich nicht verändern, und ihre Gleichungen werden sich reduciren zu

$$Ax + By + Cz = 0, \quad Ax' + By' + Cz' = 0;$$

die Gleichungen der graden Linien, welche man senkrecht auf einer jeden von ihnen, durch diesen Punct führen wird, werden seyn (E Nr. 301)

$$x = \frac{A}{C} z \qquad x = \frac{A'}{C'} z$$

$$y = \frac{B}{C} z, \qquad y = \frac{B'}{C'} z.$$

Substituirt man im Ausdruck des Cosinus V, statt a und b, a' und b', die Werthe, welche diese Gleichungen geben, so wird kommen

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Wenn eine der vorgegebenen Ebenen, die zweyte z. B. die Ebene der xen und y's wäre, für welche man immer $z = 0$ hat, so ist es einleuchtend, daß A' und B' in dieser Voraussetzung Null werden, und daß cos V sich reducirt zu

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Man wird auf eben der Art finden, daß der Cosinus des Winkels der durch die erste vorgegebene Ebene, mit der Ebene der xen und z's gebildet ist, für welchen man

$y = 0$, $A' = 0$ und $C' = 0$ hat,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

seyn wird; und daß der Cosinus des Winkels derselben Ebene mit der Ebene der y's und z's, für welchen $x=0$, $B' = 0$, $C' = 0$ ist,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

seyn wird. In dem Fall wo die beyde vorgegebene Ebenen untereinander perpendicular seyn würden, würde man haben $\cos V = 0$, und folglich

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

305.

Mit diesen Preliminarien würde es leicht seyn alle Fragen, welche der erste Theil der Essais de Géométrie etc. enthält, aufzulösen. Da aber die Länge der Bahn, die ich zu durchlaufen habe, in diese Details mich einzulassen, nicht erlaubt, so werde ich mich begnügen eine Auflösung, durch die Differentialrechnung, von der Aufgabe anzuzeigen, wo man verlangt die kürzste Entfernung von zwey graden Linien (E Nr. 57) zu finden.

Es seyn x, y und z die Coordinaten eines beliebigen Puncts der ersten gegebenen graden Linie, und x', y' und z' die eines Punctes, der nach Willkühr auf der zweyten graden Linie genommen ist; wenn im Ausdruck der Entfernung dieser Puncte,

$$u = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

ist, so setzt man statt x und y, x' und y' ihre Werthe die aus den Gleichungen der vorgegebenen graden Linie gezogen sind, die wir durch

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = a'z' + \alpha' \\ y' = b'z' + \beta' \end{array}\right\}$$

vorstellen werden, man wird haben

$$u = \sqrt{(az - a'z' + \alpha - \alpha')^2 + (bz - b'z' + \beta - \beta')^2 + (z - z')}.$$

Die Frage wird also darauf reducirt seyn, die Werthe von z und z' zu finden, die die Größe u zu einem Minimum machen. Wenn man die in der Nr. 154 angezeigten Regel anwendet, so wird man haben

$$\frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dz'} = 0$$

woraus man die Gleichungen

$$(az - a'z' + \alpha - \alpha')a + (bz - b'z' + \beta - \beta')b + z - z' = 0$$
$$(az - a'z' + \alpha - \alpha')a' + (bz - b'z' + \beta - \beta')b' + z - z' = 0$$

 ziehen

ziehen, und durch deren Hülfe man die Unbekannten z und z' bestimmen wird. Substituirt man die Resultate in u, so wird man den Ausdruck der kürzsten geforderten Entfernung finden, und zieht man nachher die übereinstimmenden Werthe von x und y und x' und y' zusammen, so wird man die Coordinaten des Punctes haben, wo die beyde vorgegebenen graden Linien sich am meisten nähern.

306.

Ich lasse bemerken, daß die Betrachtung der Maxima und der Minima sehr einfach, zur Gleichung einer graden Linie die perpendicular auf einer gegebenen Ebene ist, führen kann Es ist evident, daß, wenn x, y und z die Coordinaten des Puncts sind, wo die Perpendiculare, die vorgegebene Ebene begegnet, und x', y' und z' die des festen Puncts durch welchen man sie führt, so muß die Entfernung beyder Puncte

$$u = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

ein Minimum seyn. Im gegenwärtigen Falle sind die Größen x', y' und z' beständig, aber die drey veränderlichen Größen x, y und z sind untereinander durch die Gleichung der gegebenen Ebene,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

verbunden; man könnte also, davon eine, vermittelst dieser Gleichung, eliminiren; jedoch wird es einfacher seyn den Ausdruck von u zu differentiiren, indem man eine von diesen veränderlichen Größen z. B. z, als Function der beyden andern, betrachtet; man wird auf der Art finden

$$x - x' + (z - z')\frac{dz}{dx} = 0, \qquad y - y' + (z - z')\frac{dz}{dy} = 0.$$

Man

Man wird, um $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zu bestimmen, die Differential-Gleichungen der vorgegebenen Ebene, nemlich

$$A + C\frac{dz}{dx} = 0, \qquad B + C\frac{dz}{dx} = 0$$

haben, welche geben werden

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{B}{C},$$

und folglich

$$(x - x') = \frac{A}{C}(z - z'), \qquad y - y' = \frac{B}{C}(z - z'),$$

so wie in der (Nr. 301).

Die Länge der Perpendiculare wird, in Rücksicht auf diese Werthe,

$$u = \frac{(z - z')}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

werden, da aber die Gleichung der Ebene unter der Gestalt

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

gebracht werden kann, so wird man daraus $x - x'$ und $y - y'$ vermittelst der hier oben gefundenen Werthe wegschaffen und es wird kommen

$$\frac{z - z'}{C} = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

substituirt man in u, so wird kommen

$$u = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

307.

Von den krummen Oberflächen der zweyten Ordnung.

Die Oberflächen so wie die Linien, sind, nach dem Grade ihrer Gleichungen, in Ordnungen, eingetheilt; die

Ebene ist die Oberfläche der ersten Ordnung, weil ihre Gleichung nur bis zum ersten Grad steigt. Die Oberflächen der zweyten Ordnung sind alle in der Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ +2Gx+2Hy+2Kz \\ -L^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (1)$$

begriffen, welche die allgemeinste ist, die man im zweyten Grade, mit den drey unbestimmten Größen x, y und z bilden kann.

Lößt man diese Gleichung in Beziehung auf eine von ihnen z. B. z, auf, so wird man finden

$$z = -\frac{Ex+Fy+K}{G} \pm \frac{1}{C}\sqrt{[(E^2-AC)x^2+(F^2-BC)y^2+}$$

$$\overline{2(EF-CD)xy+2(EK-CG)x+2(FK-CH)y+K^2+CL^2]}.$$

Dieses Resultat lehrt uns, daß, mit denselben Punct der Ebene der xen und y's, zwey Puncte auf der vorgegebenen Oberfläche übereinstimmen, und daß folglich ein jeder Werth von z, durch die Substitution aller möglichen Werthe von x und y, einen Theil der Oberfläche hervorringt, welcher in Beziehung auf der ganzen Oberfläche, daß ist, was die Zweige einer Curve in Beziehung auf dieser Curve sind: Ich werde diesen Theilen den Nahmen Lappen (Nappes) geben.

Man würde sich schwerlich einen Begriff von der Gestalt machen, die eine Oberfläche deren Gleichung man hat, annehmen soll, wenn man davon nur die isolirten Puncte betrachtete; man bildet sich aber an ihrer Stelle eine unendliche Anzahl Sectionen ein, die in dieser Oberfläche durch Ebenen gemacht sind, welche man mehrerer Einfachheit wegen, parallel mit einer der coordinirten Ebenen annimmt:

Da

Da die Wege dieser verschiedenen Curven bekannt sind, so prägt ihre Continuität dem Geiste das Bild der vorgegebenen Oberfläche ein.

Selbst die Natur der Gleichungen zu drey unbestimmten Größen führt zu diesem Verfahren; denn indem man z. B. z, als eine Function von x und y betrachtet, um daraus mit Ordnung die verschiedenen Werthe zu finden, so muß man begreifen, daß, man mit jedem willkührlichen, der veränderlichen unabhängigen Größe x, gegebenen Werth, alle diejenigen übereinstimmen lasse, welche man zu gleicher Zeit der andern veränderlich unabhängigen Größe y geben kann, und daraus wird für denselben Werth von x, eine unendliche Reihe von Werthen von z entstehen: wiederhohlt man dasselbe für jeden Werth von x, so hat man eine unendliche Anzahl dieser Reihen und es ist leicht zu sehen, daß eine jede von ihnen, mit eine Section übereinstimmt, die durch eine Ebene gemacht ist, die mit der Ebene der y's und z's parallel ist, weil man darin « als beständig voraussetzt (Nr. 294).

Die folgende Tabelle wird vollkommen die Relationen, welche untereinander, die so eben genannten Reihen haben, begreiflich machen.

	y'	y''	y'''	y''''	.
x'	$z'_{\prime}$	$z''_{\prime}$	$z'''_{\prime}$	$z''''_{\prime}$	.
x''	$z'_{\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime}$	.
x'''	$z'_{\prime\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime\prime}$	.
x''''	$z'_{\prime\prime\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime\prime\prime}$	.
.	.	.	.	.	.

Da x', x'', x''', x'''' . . . die verschiedene Werthe welche der veränderlichen Größe x gegeben sind, und y', y'', y''', y'''' die von y, welche gänzlich unabhängig von den erstern sind, bezeichnen; so bilden die in jeden horizontalen Streifen enthaltenen z's die Reihe der Werthe, welche diese Function, durch die Combination aller möglichen Werthe von y mit den an der Spitze dieses Streifens gestellten Werth von x enthält. Man könnte die vorhergehende Tabelle nach verticalen Colonnen betrachten; man hätte alsdann in einer jeden die Reihe der Werthe von z, welche aus der Combination von einerley Werth von y mit alle mögliche Werthe von x, hervorgehen. Macht man in der Gleichung (1) $x = o$, so reducirt sie sich auf

$$By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Hy + 2Kz - L^2 = o$$

eine Gleichung die der Linie der zweyten Ordnung angehört, nach welcher die vorgegebene Oberfläche die Ebene der y's und z's begegnet. Giebt man nachgehends an x in der Gleichung (1) verschiedene bestimmte Werthe, so werden daraus noch Linien der zweyten Ordnung entstehen, welche sich in Ebenen die mit den erstern parallel sind, befinden. Die Voraussetzung von $y = o$ in der Gleichung (1), würde die der Linie der zweyten Ordnung hervorbringen, welche die Section der vorgegebenen Oberfläche, mit der Ebene der $x$en und z's seyn würde, giebt man nachher an y verschiedene bestimmte Werthe, so würde man successive alle Section finden die mit dieser parallel sind. Es geschieht vermittelst der Gränzen dieser verschiedenen Sectionen, daß man die, der vorgegebenen Oberfläche erkennen würde; ehe man aber diese umständliche Zergliederung beginnt, muß man die Gleichung (1) vereinfachen, welche, indem man gehörig die Lage der coordinr-

dinirten Ebenen verändert, sich sehr reduciren kann, ohne von ihrer Allgemeinheit etwas zu verlieren: denn eine Oberfläche hat, so wie eine Linie, eine unendliche Anzahl verschiedener Gleichungen, nach den verschiedenen Lagen der Axen auf welchen man sie beziehet. Wir wollen uns also mit der Transformation der Coordinaten beschäftigen.

308.

Wenn man nur die Stelle von dem Ursprunge verändern wollte, und man die neuen coordinirten Ebenen mit den erstern parallel voraussetzte, so würde es hinreichend seyn

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c$$

zu machen.

Ich will hier mich nicht in den Fall einlassen, wo sich die Richtung der Axen auf eine beliebige Art verändert; ich werde mich begnügen Formuln zu geben, um von einem System, der, unter sich perpendicularen Coordinaten, zu einem andern System von derselben Art, aber in Beziehung auf den ersten nach Willkühr gestellt, überzugehen; und um die respective Lage der primitiven coordinirten Ebenen, und derjenigen, welche man an ihre Stelle setzt, auszudrücken, so werde ich voraussetzen, daß man die Gleichung der einen in Beziehung auf der andern, hat.

Es sey also t, u und v, die neuen Coordinaten welche ihren Ursprung auf denselben Punct haben als x', y' und z'

$At + Bu + Cv = 0$ Gleichung der Ebene der y's und z's,
$A't + B'u + C'v = 0$ — — — xen und z's,
$A''t + B''u + C''v = 0$ — — — xen und y's.

Betrachtet man jetzt einen willkührlichen Punct, so wird man leicht sehen, daß die von diesem Puncte auf jeder der obigen Ebenen herabgefallene senkrechte Linien, respective gleich seyn werden, mit den primitiven Coordinaten x', y' und z' dieses Punctes (Nr. 294); nennt man also t', u' und v', ihre Coordinaten im zweyten System, so wird man durch Nr. 306 haben,

$$x' = -\frac{At' + Bu' + Cv'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$y' = -\frac{A't' + B'u' + C'v'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$z' = -\frac{A''t' + B''u' + C''v'}{\sqrt{A''^2 + B''^2 + C''^2}}.$$

Diese Werthe nach der Bemerkung welche die 295ste Nr. beschließt, werden drey überflüßige beständige Größen enthalten, dergestalt, daß man eine ähnliche Anzahl der neun Größen A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', gleich der Einheit voraussetzen könnte; aber es wird symmetrischer seyn die drey folgenden Gleichungen zu setzen

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + B^2 + C^2 = 1 \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1 \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1 \end{array}\right\} (1)$$

und weil die primitiven coordinirten Ebenen untereinander perpendicular sind, so wird man noch haben (Nr. 304)

$$\begin{array}{l} AA' + BB' + CC' = 0 \\ AA'' + BB'' + CC'' = 0 \; (2); \\ A'A''' + B'B''' + C'C''' = 0 \end{array}$$

woraus man sieht, daß nur drey beständige Größen übrig bleiben werden, mit welchen man wird disponiren können, um, in Beziehung auf den alten Coordinaten, die Lage der neuen zu bestimmen. Macht man von der

Glei-

Gleichung (1) Gebrauch, so kömmt

$$x' = -At' - Bu' - Cv'$$
$$y' = -A't' - B'u' - C'v'$$
$$z' = -A''t' - B''u' - C''v'$$

309.

Man kann sich noch zur Aufsuchung der Werthe von x', y' und z' einer derjenigen ähnlichen Betrachtung bedienen, von welcher wir schon in (Nr. 211) für die Transformation der Coordinaten auf einer Ebene Gebrauch gemacht haben. Es ist leicht zu sehen, daß die Coordinaten x', y' und z', nicht in t', u' und v', auf einer allgemeinern Art, als die Folgenden ausgedrückt werden können;

$$x' = \alpha t' + \beta u' + \gamma v'$$
$$y' = \alpha' t' + \beta' u' + \gamma' v'$$
$$z' = \alpha'' t' + \beta'' u' + \gamma'' v',$$

denn nur ein einziger Werth der Größen x', y' und z', darf nur mit einerley Werth der Größen t', u' und v' übereinstimmen, und umgekehrt. Ist dieses festgesetzt, so wird das Quadrat der Entfernung des vorgegebenen Puncts vom gemeinschaftlichen Ursprung der beyden Systeme der Coordinaten, in den ersten durch $x'^2 + y'^2 + z'^2$ und in den zweyten durch $t'^2 + u'^2 + v'^2$ ausgedrückt seyn; setzt man für x', y' und z', die, hier oben festgesetzten Werthe, so wird man wie in der Nr. 211 zwey Ausdrücke haben, welche identisch seyn sollten, was auch t', u' und v' sey, nemlich:

$$(\alpha t' + \beta u' + \gamma v')^2 + (\alpha' t' + \beta' u' + \gamma' v')^2 + (\alpha'' t' + \beta'' u' + \gamma'' v')^2,$$

und $$t'^2 + u'^2 + v'^2.$$

Entwickelt man die erste, und vergleicht man die homologen Glieder der einen und der andern, so wird man die sechs Gleichungen finden,

$$\left.\begin{array}{r}\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1\end{array}\right\}(3)\quad \left.\begin{array}{r}\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0\\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0\end{array}\right\}(4);$$

welches sehen läßt, daß, von den neun beständigen Größen, die in den allgemeinen Ausdrücken von x', y' und z' hineinkommen nur drey unabhängig sind.

Die Vergleichung der Werthe von x', y' und z', welche in diesem Artikel festgesetzt sind, mit den erstern im vorhergehenden Artikel giebt,

$$\alpha=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\quad \beta=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\gamma=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\alpha'=\frac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\quad \beta'=\frac{-B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

$$\gamma'=\frac{-C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

$$\alpha''=\frac{-A''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}};\quad \beta''=\frac{-B''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}};$$

$$\gamma''=\frac{-C''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}};$$

woraus man sieht, daß α, β und γ, negativ genommen die Cosinus der Winkel sind, welche die Ebene der y's und z's mit einer jeden der neuen coordinirten Ebenen (Nr. 304) macht, daß es sich eben so mit α', β' und γ' verhält, für die Ebene der xen und y's.

Wenn man die vorhergehenden Ausdrücke von α, α' u. s. w. in den sechs Bedingungs-Gleichungen setzte, die, zwischen diese Größen gefunden sind, so würde man zu neue Relationen zwischen A, B, u. s. w. kommen, Relationen

tionen welche man auch unmittelbar aus der Combination der Gleichungen (2) ableiten könnte, aber auf einer weniger bequemen Art. Wenn man, mehrerer Einfachheit wegen voraussetzt, daß, die willkührlichen Gleichungen (1) statt haben, so hat man auf der Stelle

$$\alpha = -A, \quad \alpha' = -A', \quad \alpha'' = -A'',$$
$$\beta = -B, \quad \beta' = -B', \quad \beta'' = -B'',$$
$$\gamma = -C, \quad \gamma' = -C', \quad \gamma'' = -C'',$$

woraus man ziehen wird

$$\left.\begin{array}{l} A^2+A'^2+A''^2=1 \\ B^2+B'^2+B''^2=1 \\ C^2+C'^2+C''^2=1 \end{array}\right\}(5) \qquad \left.\begin{array}{l} AB+A'B'+A''B''=0 \\ AC+A'C'+A''C''=0 \\ BC+B'C'+B''C''=0 \end{array}\right\}(6)$$

310.

Aus den Ausdrücken von x', y' und z', die im Anfange dieses Artikels gegeben sind, kann man die von t', u' und v' auf zwey verschiedene Arten ziehen, und indem man die Resultate einander nähert, gelangt man noch zu neue Relationen zwischen den Größen α', β, u. s. w. In Wahrheit, wenn man die Werthe von x', y', z', respective 1) durch α, α', α'', 2) durch β, β', β'', 3) durch γ, γ', γ'', multiplicirt und die drey erste Resultate zusammen addirt, es eben so mit den drey letzten macht, so wird Kraft den Gleichungen (3) und (4), kommen,

$$t' = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z'$$
$$u' = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z'$$
$$v' = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'.$$

Substituirte man diese Werthe in dem Ausdruck $t'^2+u'^2+v'^2$, und vergleicht solchen nachgehends mit $x'^2+y'^2+z'^2$, so würde man die sechs Gleichungen finden.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\end{array}\right\}(7)\quad \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0\\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0\end{array}\right\}(8)$$

in welchen die Gleichungen (1) und (2) von (Nr. 309) eingehen.

Berechnet man directe die Werthe von t', u' und v', durch die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grades $x'=\alpha t'+\beta u'+\gamma v'$, $y'=\alpha' t'+\beta' u'+\gamma' v'$, $z'=\alpha'' t'+\beta'' u+\gamma'' v'$, und wenn man zur Abkürzung macht

$$\delta=\alpha\beta'\gamma''-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha''\beta'\gamma,$$

so wird kommen

$$t'=\frac{x'(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+y'(\beta''\gamma-\gamma''\beta)+z'(\beta\gamma'-\gamma\beta')}{\delta},$$

$$u'=\frac{x'(\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha')+y'(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')+z'(\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)}{\delta},$$

$$v'=\frac{x'(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')+y'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+z'(\alpha\beta'-\beta\alpha')}{\delta};$$

vergleicht man die Coefficienten der Größen x', y' und z', in diesen Werthen, mit denen, die mit ihnen in den vorhergehenden übereinstimmen, so wird man die folgenden neun Gleichungen bilden

$$\beta'\gamma''-\gamma'\beta''=\delta\alpha,\quad \beta''\gamma-\gamma''\beta=\delta\alpha',\quad \beta\gamma'-\gamma\beta'=\delta\alpha''$$
$$\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha'=\delta\beta,\quad \alpha\gamma''-\gamma\alpha''=\delta\beta',\quad \alpha'\gamma-\gamma'\alpha=\delta\beta''$$
$$\alpha'\beta''-\beta'\alpha''=\delta\gamma,\quad \alpha''\beta-\beta''\alpha=\delta\gamma',\quad \alpha\beta'-\beta\alpha'=\delta\gamma''.$$

Wenn man die Quadrate der drey Gleichungen, welche die erste Linie bilden, zusammenaddirt, so wird man finden $(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2+(\beta''\gamma-\gamma''\beta)^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2=\delta^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)^2$; die erste Hälfte von diesem Resultate kann unter die Gestalt

$$(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)\ (\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)-(\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'')^2$$

gesetzt werden, und reducirt sich auf die Einheit, so wie der Coefficient von δ^2, in der zweyten Hälfte vermöge der Gleichungen (3) und (4): man hat also $1=\delta^2$. Man kön=

könnte daraus schließen $\delta = \pm 1$; jedoch ist es leicht sich zu versichern, daß diese Größe positiv seyn muß, denn indem man die neuen Coordinaten mit den primitiven Coordinaten sich decken läßt, d. h. indem man voraussetzt, daß $t' = x'$, $u' = y'$ und $v' = z'$, ist, so hat man

$$\alpha = 1, \quad \beta' = 1, \quad \gamma'' = 1,$$

die andern beständigen Coefficienten werden Null, und die Größe die δ vorstellt, wird zu $+ 1$.

Die Bestimmung der sechs überflüßigen Coefficienten, vermittelst der drey andern, wird immer geschehen können, indem man die verschiedenen Relationen, welche wir im Vorhergehenden gefunden haben, zusammen verbindet, und die Eleganz des Resultats wird von der Wahl der Data, und von der Geschicklichkeit die man in den Reductionen angewandt haben wird, abhangen. Ich kann mir nicht in diese Details einlassen, und verweise deshalb den Leser zu Lagrange's analytischen Mechanik.

Ich bemerke jedoch, daß Monge indem er, die Coefficienten α, β' und γ'' als die Data nimmt, und

$$1 + \alpha + \beta' + \gamma'' = M$$
$$1 + \alpha - \beta' - \gamma'' = N$$
$$1 - \alpha + \beta' - \gamma'' = P$$
$$1 - \alpha - \beta' + \gamma'' = Q$$

macht, gefunden hat,

$$2\beta = \sqrt{NP} + \sqrt{MQ}, \quad 2\alpha'' = \sqrt{NQ} + \sqrt{MP},$$
$$2\gamma' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}$$
$$2\alpha' = \sqrt{NP} - \sqrt{MQ}, \quad 2\gamma = \sqrt{NQ} - \sqrt{MP},$$
$$2\beta'' = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}. \text{*)}$$

Die

*) Zu diesen Werthen kann man folgendergestallt gelangen;

Man hat durch die Gleichungen (3), Seite 284, und die Gleichungen (7), Seite 286,

$\gamma^2 =$

Die Symmetrie dieser Resultate ist eine Folge von denen der gegebenen Größen, in welchen sich ein Coefficient einer jeden der neuen Coordinaten, in einen jeden der Werthe der primitiven Coordinaten genommen, befindet. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn drey der Größen M, N, P und Q gegeben sind, so ist es die vierte auch, denn man hat die Gleichung

$$4 = M + N + P + Q.$$

In den Fall wo man sich vornehmen würde, nur die Lage der beyden Axen zu verändern, müssen sie, auf daß sie untereinander perpendicular blieben, nicht aus der ihnen gemeinschaftlichen coordinirten Ebene herausgehen, und alsdann würde die, auf dieser Ebene perpendiculare Coordinate, dieselbe in den beyden Systemen seyn. Wir wollen

$$\gamma^2 = 1 - \gamma'^2 - \gamma''^2, \quad \gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2, \quad \gamma'^2 = 1 - \alpha'^2 \;\; \beta'^2;$$

die zwey ersten von diesen, geben

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma'^2 + \gamma''^2,$$

und setzt man für γ'^2 ihren Werth, so kommt

$$\alpha'^2 + \beta^2 = 1 - \alpha^2 - \beta'^2 + \gamma''^2;$$

wenn man aber $\delta = 1$ in den Formeln von Seite 286 macht, so findet man

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = \gamma', \text{ woraus } 2\alpha'\beta = 2\alpha\beta' - 2\gamma''$$

dieses Resultat von der obigen Gleichung successive, addirt und abgezogen, giebt

$$\alpha'^2 + \beta^2 + 2\alpha'\beta = 1 - \alpha^2 - \beta'^2 + 2\alpha\beta' - 2\gamma'' + \gamma''^2.$$

$$\alpha'^2 + \beta^2 - 2\alpha'\beta = 1 - \alpha^2 - \beta'^2 - 2\alpha\beta' - 2\gamma'' + \gamma''^2, \text{ und}$$

$$\alpha' + \beta = \sqrt{[(1 - \gamma'')^2 - (\alpha - \beta')^2]} = \sqrt{[(1 + \alpha - \beta' - \gamma'')(1 - \alpha + \beta' - \gamma'')]}$$

$$\alpha' - \beta = \sqrt{[(1 + \gamma'')^2 - (\alpha + \beta')^2]} = \sqrt{[(1 + \alpha + \beta' + \gamma'')(1 - \alpha - \beta' + \gamma'')]},$$

welches zu den zwey ersten Ausdrücken der cittirten Seite führt, und hinreicht zu zeigen, auf welche Art man zu den andern kommen könnte.

wollen voraussetzen, daß gefordert würde die beyden einzelnen Coordinaten x und y zu transformiren, man wird in diesem Falle $v' = z'$ haben, welches geben wird $\alpha''=0$, $\beta'' = 0$ und $\gamma'' = 1$; und da x' und y' von v' unabhängig seyn sollen, so wird kommen $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$, diese Hypothesen in den Gleichungen (7) und (8) eingeführt, reduciren solche zu den 3 folgenden

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = 1, \quad \beta^2 + \beta'^2 = 0, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' = 0,$$

welche denjenigen ähnlich sind die man Seite 111, zwischen m und n, p und q, gefunden hat: es wird also daraus hervorgehen

$$x' = \alpha t' - \beta u', \quad y' = \beta t' + \alpha u', \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

311.

Wir wollen zur Allgemeinen Gleichung der Oberflächen, der zweyten Ordnung, zurückkehren,

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz \\ - L^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (a)$$

und darin $x' + a$ statt x, $y' + b$ statt y, und $z' + c$ statt z, setzen, so wird kommen

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' \\ + 2x'(Aa + Db + Ec + G) + 2y'(Bb + Da + Fc + H) \\ \qquad + 2z'(Cc + Ea + Fb + K) \\ + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc + 2Ga \\ \qquad + 2Hb + 2Kc - L^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (a)$$

Man wird die Größen a, b, c, dergestalt bestimmen können, daß man die mit x', y' und z' behafteten Glieder verschwinden lassen kann, welche die zweyte Zeile bilden indem man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Db + Ec + G = 0 \\ Bb + Da + Fc + H = 0 \\ Cc + Ea + Fb + K = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (b)$$ setzt.

Wenn man die erste durch a, die zweyte durch b, und die dritte durch c multiplicirt, und ihre Summe von der vorhergehenden Gleichung abzieht, nachdem man die zweyte Zeile ausgelöscht hat, so wird bleiben

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z' \\ \quad + Ga \quad + Hb \quad + Kc - L^2 \end{array}\right\} = o \ldots (c)$$

Wir haben nur die Lage des Ursprungs verändert; wir wollen jetzt den Axen eine andere Richtung geben, indem wir

$$\alpha t+\beta u+\gamma v,\ \alpha' t+\beta' u+\gamma' v \text{ und } \alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v$$

für x', y' und z' setzen; wir werden ein Resultat von folgender Gestalt haben

$$\left.\begin{array}{l} A't^2+B'u^2+C'v^2+2D'tu+2E'tv+2F'uv \\ \qquad - L'^2 \end{array}\right\} = o,$$

Weil die Transformation die wir so eben angezeigt haben, drey beständige willkührliche Größen eingeführt hat, so wird man, indem man sie gehörig bestimmt, eine ähnliche Anzahl Glieder dieser Gleichung, verschwinden lassen können; macht man

$$D' = o, \qquad E' = o, \qquad F' = o,$$

so wird sie sich auf

$$A't^2 + \beta'u^2 + C'\gamma'^2 - L'^2 = o \ldots\ldots (d)$$

reduciren.

Es würde vielleicht sehr schwer seyn sich a priori zu versichern, daß die Entwickelungen der Gleichungen

$$D' = o, \qquad E' = o, \qquad F' = o,$$

immer reelle Werthe für die beständigen Größen, welche man vermittelst ihrer, als bestimmte Größen betrachtet, geben werden; wenn man aber zuerst nur, z. B. zwey Glieder tv und uv verschwinden liesse, so könnte man die eine der beständigen Größen gebrauchen, um die Wurzeln der Endgleichung, von welcher die Bestimmung der beyden

den andern abhangen wird, reell zu machen: man begreift also, daß es immer möglich ist die Gleichung (c) zu der Gestalt

$$A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + 2D'tu - L'^3 = 0$$

zurückzuführen.

Wenn dieses gemacht ist, und man statt t und u, $mr - ns$ und $nr + ms$ setzt, so wird man das Product der neuen Coordinaten r und s, durch eine, derjenigen, ähnlichen Gleichung, wegbringen, von welcher wir schon in Nr. 213 Gebrauch gemacht haben, um die Gleichung der Linien der zweyten Ordnung von dem Producte ut zu entledigen.

Indem man die Gleichung (d) in Beziehung auf einer jeden der Cooordinaten t, u, v, auflößt, so giebt sie zwey gleiche Werthe und von entgegengesetzten Zeichen, welches uns lehrt, daß die vorgegebene Oberfläche auf der einen Seite sowol, als auf der andern einer jeden der coordinirten Ebenen, untereinander gleiche Ordinaten hat, und daß sie folglich durch diese Ebenen in zwey gleiche Theile getheilt ist, wie es eine Curve durch ihre Durchmesser. Die, in jedem körperlichen Winkel der coordinirten Ebenen, begriffene Theile, sind untereinander ähnlich, weil die Gleichung (d) sich nicht verändert, welches Zeichen auch die veränderlichen Größen t, u und v annehmen mögen. Die Axen dieser Coordinaten sind zugleich die Axen der Oberfläche, welche die Gleichung (d) vorstellt, und so wie man den Nahmen Durchmesser den Ebenen giebt, die beyderseits gleiche Ordinaten haben, und so wie man die Durchschnitte dieser Ebenen Axen nennt, so bezeichnet man unter den Nahmen, Hauptaxen diejenigen die Untereinander Perpendicular sind.

312.

Um die verschiedene Oberflächen zu kennen die in der Gleichung (d) begriffen seyn können, so muß man erst suchen, welches die Natur der Sectionen ist, die in diesen Oberflächen, durch einer jeden der coordinirten Ebenen, parallelen Ebenen, gemacht sind. Wenn man zuerst t als beständig betrachtet, und zur Verkürzung $L'^2 - A't^2 = \lambda^2$ annimmt, so wird man haben $B'u^2 + C'v^2 = \lambda^2$: je nachdem B' und C' von einerley oder verschiedenen Zeichen seyn werden. Diese Gleichung wird die von einer Ellipse oder einer Hyperbel seyn. Im erstem Falle wird die vorgegebene Oberfläche durch eine Reihe von Ellipsen gebildet werden, welche alle in Ebenen liegen, die mit denen der u's und v's parallel sind, und die untereinander nur durch die Werthe unterschieden seyn werden, welche λ denjenigen Werthen gemäß nehmen wird, die t erhält. Wenn $t = 0$ ist, so hat man $\lambda = L'$ und es kommt $B'u^2 + C'v^2 = L'^2$, eine Gleichung welche der Ellipse CDcd gehört (Fig. 46) in welcher die vorgegebene Oberfläche die Ebene der u's und v's begegnet. Macht man successive u und v gleich Null, so findet man

$$v = \frac{L'}{\sqrt{B'}}, \quad u = \frac{L'}{\sqrt{B'}},$$

für die halbe Axen AD und AC. Die, der folgenden Ellipsen, wird man auf dieselbe Art bekommen, und man wird allgemein haben, wenn $u = 0$, $v = \frac{\lambda}{\sqrt{C'}}$ und wenn $v = 0$, $u = \frac{\lambda}{\sqrt{B'}}$ ist, oder was einerley ist,

$$A't^2 + C'v^2 = L'^2 \text{ und } A't^2 + B'u^2 = L'^2.$$

Aber

Aber die Annahme von $u = 0$, giebt die Section der gegebenen Oberfläche, mit der Ebene der t's und v's, oder die Ellipse DBdb. Die Voraussetzung von $v = 0$, giebt die Section derselben Oberfläche, mit der Ebene der u's und t's oder die Ellipse BCbc. Man sieht also, daß die Scheitel D', C', d', c', der elliptischen Schnitte C'D'c'd' die mit der coordinirten Ebene DAC parallel sind, durch das Zusammentreffen der schneidenden Ebenen, mit den beyden so eben erwähnten Sectionen, bestimmt seyn werden. Indem man die schneidende Ebenen mit der Ebene DAB parallel voraussetzt, so würden die Sectionen, welche man bekommen würde ihre Scheitel auf den Ellipsen CDcd, und BCbc haben, und endlich, wenn man diese Ebenen parallel mit BAC nähme, so würden die Scheitel der resultirenden Sectionen auf BDbd, und CDcd liegen.

Man unterscheidet die Sectionen CDcd, BDbd, BCbc, die, in den vorgegebenen Körper, durch die coordinirten Ebenen gemacht sind, von allen denjenigen die mit ihnen parallel sind, indem man sie mit den Nahmen Hauptsectionen bezeichnet. Wenn zwey von den Coefficienten A', B' und C' untereinander gleich sind, und man z. B. $B' = C'$ hätte, so wird die Gleichung (d) die Gestalt

$$u^2 + v^2 = \frac{\lambda^2}{B'}$$

annehmen; woraus man sieht, daß alle mit der Ebene der u's und v's parallele Sectionen, Kreise seyn werden, die ihren Mittelpunct in der Axe der t's, und ihre gleiche Halbmesser in den Ordinaten der beyden Hauptsectionen BDbd und BCbc, welche identisch werden, haben: man muß also daraus schließen, daß, die vorgegebene

Oberfläche, durch die Umdrehung der Ellipse BDbd um die Axe AB, erzeugt ist. Wenn man zu gleicher Zeit $A' = B' = C'$ haben wird, so wird die Gleichung (d)

$$t^2 + u^2 + v^2 = \frac{L'^2}{A'},$$

werden, die drey Hauptsectionen sind alsdann Kreise, und der vorgegebene Körper wird eine Kugel seyn, welche den Ursprung der Coordinaten zum Mittelpuncte und zum Radius $\frac{L'}{\sqrt{A'}}$ hat.

313.

Wir haben bis jetzt nur den Fall betrachtet, wo die Coefficienten A' B' und C' positiv waren; variirt man die Zeichen dieser Coefficienten, so wird man die verschiedene Oberflächen erhalten, die in der Gleichung (d) enthalten sind, und man wird sie leicht durch die Natur ihrer Hauptsectionen, unterscheiden. Es sey

$$A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = L'^2;$$

so werden in diesem Falle die Gleichungen der Hauptsectionen seyn

$A't^2 + B'u^2 = L'^2$, $A't^2 - C'v^2 = L'^2$, $B'u^2 - C'v^2 = L'^2$,

die erstere wird eine Ellipse seyn, und die beyden andern werden zu Hyperbeln gehören. Alle Schnitte des vorgegebenen Körpers, werden Ellipsen die parallel mit der Ebene der u's und t's und Hyperbeln seyn, die mit einer jeden der beyden andern coordinirten Ebenen parallel sind.

Wenn die vorgegebene Gleichung

$$A't^2 - B'u^2 - C'v^2 = L'^2$$

wäre, so würde man für die drey Hauptsectionen haben

$-B'u^2 - C'v^2 = L'^2$, $A't^2 - C'v^2 = L'^2$, $A't^2 - B'u^2 = L'^2$,

die

die erste ist augenscheinlich imaginair, die zweyte und die dritte sind Hyperbeln; und es ist leicht zu sehen, daß der Körper aus Hyperbolische Abschnitte bestehen wird, die mit der Ebene der t's und v's parallel sind, und deren Scheitel sich auf der zweyten Hyperbel befinden werden, welche die Hauptsectionen in Beziehung auf der Ebene der u's und t's ist. Man kann auch in diesen Körper die Elliptischenschnitte finden, die parallel mit der Ebene der u's und v's ist, indem man t dergestalt nimmt, daß man $A't^2 > L'^2$ hat, denn alsdann kann die vorgegebene Gleichung unter der Gestalt von $B'u^2+C'v^2=\lambda^2$ gesetzt werden, indem man $A't^2-L'^2=\lambda^2$ macht.

314.

Wir wollen jetzt die Fälle untersuchen in welchen die Gleichung (d) einige ihrer Glieder verloren hat, und sogleich $L'=0$ voraussetzen, so werden wir alsdann haben $A't^2+B'u^2+C'v^2=0$; wenn alle Coefficienten A', B', C' positiv sind, so könnte diese Gleichung nur durch die Werthe $t=0$, $u=0$ und $v=0$, befriediget werden (Siehe die Note Seite 103), die vorgegebene Oberfläche wird sich also zu einem am Ursprunge der Coordinaten gelegenen Punct reduciren.

Wenn einer der Coefficienten A', B', C', negativ wird, und man z. B. $A't^2+B'u^2-C'v^2=0$ hat, so sind die Gleichungen der drey Hauptsectionen.

$A't^2+B'u^2=0$, $A't^2-C'v^2=0$, $B'u^2-C'v^2=0$.

Die erste zeigt nur den Ursprung der Coordinaten an, weil sie aus der Annahme von $v=0$ entsteht, und weil sie zugleicher Zeit $t=0$ und $u=0$ giebt; die beyden andern gehören den graden Linien die durch den Ursprung gehen, denn man zieht daraus

$$t = v\sqrt{\frac{C'}{A'}},\quad u = v\sqrt{\frac{C'}{B'}}.$$

Die mit der ersten Hauptsection parallele Schnitte (coupes) werden Ellipsen seyn, und die welche mit der zweyten und dritten Hauptsection parallel seyn werden, werden Hyperbeln seyn.

Weil aber die vorgegebene Gleichung in Beziehung auf den veränderlichen Größen welche sie enthält gleichartig ist, so könnte man eine von ihnen wegschaffen, indem man $u = pt$ und $v = qt$ annimmt, woraus hervorgehen wird $A' + B'p^2 - C'q^2 = 0$, und wenn man eine der Größen p und q willkührlich nimmt, so wird die andere dergestalt bestimmt seyn, daß die Gleichungen $u = pt$ und $v = qt$ der vorgegebenen genug thun, diese Gleichungen gehören aber einer durch den Ursprung gehenden graden Linie; es ist also evident, daß die durch

$$A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = 0,$$

vorgestellte Oberfläche, durch eine unendliche Anzahl Linien dieser Art gebildet seyn wird, und folglich wird sie eine der conischen Oberflächen seyn, die den Ursprung der Coordinaten zum Scheitel hat (E Nr. 79).

Indem man eben so $u = pt$ und $v = qt$ in einer gleichartigen Gleichung von irgend einem Grade zwischen den veränderlichen Größen t, u und v, macht, so wird man beweisen, daß sie einer conischen Oberfläche angehört, indem man diese Benennung in ihrer ganzen Allgemeinheit nimmt. Es folgt daraus, daß, wenn man in einer vorgegebenen Gleichung durch eine bloße Veränderung des Ursprungs, alle Glieder die nicht von denselben Grade sind, herausschaft, diese Gleichung, die einer conischen Oberfläche seyn wird.

Wir

Wir wollen voraussetzen, daß einer der Coefficienten A', B', C' in der Gleichung (d) Null sey, und daß man z. B. $A't^2 + B'u^2 = L'^2$ hätte: je nachdem die Coefficienten A und B von demselben oder von einem andern Zeichen seyn werden, so wird diese letzte Gleichung eine in der Ebene des u's und t's gezogene Ellipse oder Hyperbel bezeichnen; da aber v dadurch nichts bestimmt ist, so wird man dieser veränderlichen Größe, jeden beliebigen Werth geben können, und, wenn man folglich in alle die so eben erwähnte Puncte, Perpendicularen auf die Ebene der u's und t's errichtet, so wird die Gleichung

$$A't^2 + B'u^2 = L'^2,$$

für einen jeden der Puncte dieser graden Linien, die eine cylindrische Oberfläche bilden werden, statt haben (E Nr. 80). Die in ihrer ganzen Allgemeinheit genommene Gleichung

$$A't^2 + B'u^2 = L'^2,$$

muß also als eine dem Cylinder angehörige, angesehen werden, die zur Basis eine Ellipse oder Hyperbel hat. Die Gleichungen $A't^2 = L'^2$, $B'u^2 = L'^2$, welche man erhalten wird, indem man successive $u = 0$, $t = 0$, macht, werden geben $t = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$ und $u = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$; diese Resultate stellen zwey grade mit der Axe parallele Linien vor, und welche die zwey Hauptsectionen des vorgegebenen Cylinders durch die Ebene der t's und v's und der u's und v's, sind. Es ist leicht zu sehen, daß, alle Schnitte, die mit diesen Ebenen parallel sind, ebenfalls grade, unter sich parallele Linien sind, und daß alle Schnitte, die parallel mit der Ebene der u's und t's sind, der Basis des Cylinders selbst gleich und ähnlich seyn werden.

Ueberhaupt eine jede Gleichung die nur zwey der drey veränderlichen Größen enthält, wird, von wel-

chem Grade sie auch sey, einer cylindrischen Oberfläche angehören, die durch Linien gebildet ist, welche auf der Ebene auf welcher sich diese beyde veränderliche Größen befinden, perpendicular sind. Es folgt daraus, daß, wenn man die Richtung der Coordinatenaxe verändert, und man zur Wegschaffung einer der veränderlichen Größen aus einer jeglichen Gleichung gelangt; man daraus schließen muß, daß diese Gleichung, eine cylindrische Oberfläche vorstellt, deren Basis, die Transformirte selbst zur Gleichung hat.

Man wird auf eben der Art sehen, daß, wenn die Transformation, zwey, der drey veränderlichen Größen wegschaft, die vorgegebene Gleichung nur eine, oder mehrere Ebenen ausdrücken würde; denn man würde aus der Transformirten einen oder mehrere bestimmte Werthe für die bleibende Coordinate ziehen, und die beyden andern würden willkührlich bleiben: also die Gleichung $A'v^2 = L'^2$, welche $v = \pm \frac{L'}{\sqrt{A}}$ giebt, ist die, von den beyden Ebenen, welche parallel mit die der t's und u's, die eine über die andere unterwärts, geführt sind.

315.

Durch das Vorhergehende haben wir nur die Oberflächen von der zweyten Ordnung, welche einen Mittelpunct haben, finden können; aber nicht alle genießen diese Eigenschaft, denn wenn der gemeinschaftliche Nenner von den Werthen der Größen a, b und c, welche durch die Gleichungen (b) (Nr. 311) bestimmt sind, Null wird, so wird es nicht möglich seyn, zu gleicher Zeit alle mit der ersten Potenz einer jeden veränderlichen Größe behafteten Glieder wegzuschaffen.

Um

Um die, des Mittelpuncts beraubte Oberflächen wieder zu erkennen, so laßt uns die allgemeine Gleichung (a) wieder vornehmen; aber angenommen, daß man zuerst die Glieder $2Dxy$, $2Exz$, $2Fyz$ wegschaft, indem man die Richtung der Axen verändert, und nur bloß übrig bleibt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz - L^2 = 0;$$

so ist leicht zu sehen, daß, indem man $x' + a$, $y' + b$ und $z' + c$ statt x, y und z substituirt, man nicht die erste Potenz, von die, der veränderlichen Größen deren Quadrat in der obigen Gleichung fehlen würde, verschwinden lassen könnte. Man wird also, um daß dieser Fall in dem Resultate mit begriffen ist, nur bloß dem Coefficient der ersten Potenz der beyden veränderlichen Größen gleich Null machen, z. B. von x' und y' und die dritte willkührliche Größe c anwenden, um das beständige Glied zu Null zu machen: man wird durch dieses Mittel ein Resultat von folgender Gestalt erhalten

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2K'z' \quad 0.$$

Dieses ist die einfachste Gleichung, welche zu gleicher Zeit alle Oberflächen der zweyten Ordnung in sich begreifen kann; sie ist mit derjenigen analog, welche wir für die Linien derselben Ordnung (Nr. 214) gegeben haben.

Jetzt wollen wir den Fall untersuchen wo die vorgegebene Gleichung auf

$$Ax'^2 + By'^2 + 2K'z' = 0$$

reducirt wäre.

Wenn die Coefficienten A und B dasselbe Zeichen haben, so werden die Gleichungen der Hauptsectionen seyn

$$Ax'^2 + By'^2 = 0, \quad Ax'^2 + 2K'z' = 0, \quad By'^2 + 2K'z' = 0,$$

indem man jedesmahl voraussetzt, daß, man z' von einem der Coefficienten A und B entgegengesetzten Zeichen nähme, sonst würde die vorgegebene Gleichung nur durch

die

die Werthe $x' = 0$, $y' = 0$ und $z' = 0$ befriedigt werden können.

Die erste Hauptsection ist nur ein Punct; die zweyte und die dritte Section sind Parabeln, so wie alle Schnitte die respective mit den Ebenen der xen und z's und der y's und z's parallel sind.

Wenn die Coefficienten A und B von verschiedenen Zeichen seyn werden, so wird die erste Hauptsection die zur Gleichung $Ax'^2 - By'^2 = 0$ hat, eine grade, Linie die ihr parallele Schnitte werden Hyperbeln seyn, und die beyden andern Hauptsectionen werden parabolisch bleiben.

Endlich, wenn einer der Coefficienten A und B Null seyn wird, so wird, wenn die vorgegebene Gleichung nur noch zwey veränderlichen Größen enthalten wird, einem Cylinder angehören, der zur Basis eine Parabel hat, die in der Ebene der zwey bleibenden Coordinaten liegt.

Auf diesen Fall muß man die Gleichung

$$Ax^2 + 2Hy + 2Kz = 0$$

beziehen, welche im Anfange nicht in der allgemeinen Gleichung

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2K'z' = 0$$

mitbegriffen zu seyn scheint; denn wenn man die Coordinaten x und z versetzt, indem man $\alpha y' - \beta z'$, der erstern und $\beta y' + \alpha z'$ der zweyten substituirt, (Seite 287) so wird man y' oder z' herausschaffen können.

316.

Wir haben gezeigt (Nr. 312), daß die nach allen Richtungen aus Elliptischenschnitten bestehende Oberfläche eine aus der Umdrehung um die Axe der t's entstandene Oberfläche würde, wenn man $B' = C'$ hätte.

Macht

Macht man auch eben so $A = B$ in der Gleichung

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2K'z' = 0,$$

welche alle Oberflächen der zweyten Ordnung in sich begreift, so wird man die Gleichungen derjenigen Oberflächen finden, welche durch die Umdrehung einer Curve um die Axe der z's erzeugt werden können, denn es wird kommen

$$A(x'^2 + y'^2)^2 + Cz'^2 + 2K'z' = 0;$$

alle, mit der Ebene der x's und y's parallele Sectionen, werden Kreise seyn; die beyden Hauptsectionen, welche durch die Ebenen der x's und z's und der y's und z's gemacht sind, werden dieselben seyn, und werden die Curve hervorbringen, die, indem sie sich um der Axe der z's herumdrehet, den vorgegebenen Körper erzeugt. Man wird die durch Umdrehung entstandene Ellipsoide haben, wenn der Coefficient C positiv ist, die Hyperboloide, wenn er negativ ist, und endlich die Paraboloide, wenn er Null ist.

Ueberhaupt, wenn die Annahme von $x^2 + y^2 = u^2$ die veränderlichen Größen x und y in einer beliebigen Gleichung wegschafft, so wird man daraus schließen müssen, daß diese Gleichung einer Oberfläche gehört, die durch die Umdrehung einer Curve um die Axe der z's erzeugt ist, denn, indem man $z =$ Constant macht, und die Gleichung, in Beziehung auf u, auflößt, so würde man daraus ziehen $u =$ Constant, oder $\sqrt{x^2 + y^2} =$ Constant, welches beweisen würde, daß alle Schnitte, die parallel mit der Ebene der x's und y's sind, oder perpendicular auf der Axe der z's, Kreise seyn würde.

317.

Die krumme Oberflächen haben zu Asymptoten andre Oberflächen. Wenn man z. B. die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = L^2 \text{ (Nr. 314)}$$

nimmt, und daraus den Werth von z ziehet, so wird kommen

$$z = \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{Ax^2 + By^2 - L^2},$$

reducirt man diese Ausdrücke, in einer Reihe, so wird man finden

$$z = \frac{(Ax^2 + By^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{C}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{L^2}{Ax^2 + By^2} + \text{u.s.w.} \right\}$$

ein Resultat dessen zweytes Glied um so viel kleiner seyn wird, als die veränderlichen Größen x und y größer werden; woraus folgt, daß die Ordinate z, immer weniger und weniger von der Ordinate der conischen Oberfläche unterschieden seyn wird, deren Gleichung seyn würde

$$z' = \frac{(Ax^2 + By^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{C}}:$$

Diese Oberfläche ist also die Asymptote der erstern.

Die Untersuchung der Asymptoten der krummen Oberflächen, reducirt sich auf die, der beträchtlichsten Glieder ihrer Gleichungen, in der Hypothese von x und y sehr klein oder sehr groß, ein, und ist auf den in Nr. 118 und folgende entwickelten Principien, gegründet.

318.

Aus den Durchschnitt einer Ebene mit einer krummen Oberfläche der zweyten Ordnung, kann nur eine Linie von derselben Ordnung entstehen; denn indem man die

Rich-

Richtung der Axen dergestalt verändert, daß die schneidende Ebene eine der coordinirten Ebenen wird, und die Coordinate die mit ihr perpendicular seyn wird, Null macht, so wird man die Gleichung ihres Durchschnittes mit der vorgegebenen Oberfläche haben, und es ist sichtbar, daß die Substitution der allgemeinen Werthe von x, y und z, nicht den Grad der vorgegebenen Gleichung verändern wird. Man würde eben so beweisen, daß eine jegliche Oberfläche, nicht durch eine Ebene långst der Curve von einer höhern Ordnung als die ihrige, geschnitten werden kann.

Zwey Oberflächen schneiden sich immer långst einer Linie; wenn sie beyde krumm sind; es geschiehet mehrentheils daß alle Puncte ihrer Durchschnitte nicht in einerley Ebene seyn können; dieses ist der Ursprung der Curven von doppelter Krümmung (E Nr. 81). Diese Curven sind durch das System der Gleichungen derjenigen Oberflächen deren Durchschnitte sie sind, vorgestellt, weil die Coordinaten ihrer Puncte, zu gleicher Zeit einer jeden dieser Gleichung befriedigen sollen.

319.

Man transformirt auch die rechtwinklige Coordinaten eines beliebigen Punctes, des Raums in Polarcoordinaten, wie folgt.

Man gedenket sich einen Radiusvector AM (Fig. 44) und um dessen Lage festzusetzen, so nimmt man seine Zuflucht zum Winkel MAM', welchen er mit seiner Projection auf der Ebene BAC macht, ferner zum Winkel M'AB, welchen diese Projection mit der Axe AB bildet, und man findet durch dieses Mittel

MM'

$MM' = AM \sin MAM'$, $AM' = AM \cos MAM'$
$PM' = AM' \sin M'AB$, $AP = AM' \cos M'AB$.

Setzt man also

$AM = r$, $MAM' = p$, $M'AB = q$,

so wird kommen

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $z = r.\sin p$, $y = r.\cos p.\sin q$, $x = r \cos p \cos q$

Man würde mehr symetrische Ausdrücke erhalten haben, wenn man die Winkel welche der Radiusvector AM mit einer jeden der Coordinaten MM′, MM″, MM‴ bildet, anwendet; denn indem man diese Winkel φ, ψ und π nennt, so würde man durch die Dreyecke MAM′, MAM″, MAM‴, haben

$$MM' = AM \cos AMM' = r \cos \varphi = z$$
$$MM'' = AM \cos AMM'' = r \cos \psi = y$$
$$MM''' = AM \cos AMM''' = r \cos \pi = x$$

wo man bemerken wird, daß $\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\pi^2 = 1$ ist (E Nr. 60).

320.

Anwendung des Differentialcalcul, auf die Theorie der krummen Oberflächen.

x, y und z mögen die Coordinaten eines Punctes M, Fig. 47, seyn, der sich auf einer beliebigen krummen Oberfläche befindet; man wird die Ordinate $PM = z$ als eine Function der beyden Abscissen $AP = x$ und $PM' = y$ betrachten können. Wenn x, welches sich allein verändert $x + h$ werden wird, so wird man (für die Entwickelung der Ordinate $m'm$, in der Section RMm genommen, die durch eine Ebene welche parallel mit der, der x's und z's gemacht ist, und durch den vorgelegten Punct gehet, die Reihe

$z +$

$$z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} \text{ u. s. w.}$$

haben.

Wenn es y ist, die sich in y + k verwandelt, und x beständig bleibt, so wird man die Ordinate n′n bekommen, in der Section PMn genommen, die durch eine Ebene, welche parallel mit der der y's und z's gemacht ist, und die durch den vorgegebenen Punct gehet. Die Entwickelung von dieser Ordinate wird seyn

$$z + \frac{dz}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

Läßt man x und y zu gleicher Zeit sich verändern, so wird man von dem Punct M zu einem beliebigen Punct N übergehen, und dieses auf zweyerley Art, nemlich, indem man statt y in der hier oben angeführten Entwickelung y + k, oder auch wohl x + h statt x in der zweyten Entwickelung substituirt. Durch eine dieser Operationen, gelangt man von der Ordinate m′m zu der Ordinate N′N in der Section pmN, und in der andern gelangt man von n′n zu N′N, in der Section rnN; die Resultate welche man bekommt sind identisch und finden sich in Nr. 25 und 26. Im allgemeinen werden also x und y respective x + h und y + k, man hat

$$z + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2\right)$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

Zur Verkürzung werde ich diese Reihe vorstellen durch

$$z + ph + qk$$
$$+ \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man aufhören wird, die Größen h und k als unabhängig eine von der andern zu betrachten, und man ein Verhältniß unter ihnen aufstellt, so wird man die Richtung der Ebene, welche auf die der x's und y's senkrecht geführt ist, durch die beyde Puncte M und N fixiren, den

$$\frac{k}{h} = \frac{N'm'}{M'm'} = \operatorname{tg} N'M'm'.$$

Es folgt aus den vorhergehenden Betrachtungen und aus dem was in Nr. 79 gesagt worden, daß, wenn $u = 0$ die Gleichung einer krummen Oberfläche vorstellt, so werden die Differential-Gleichungen

$$\frac{du}{dx} \quad \frac{du}{dz}\,dz = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\,dz = 0,$$

respective den beyden Sectionen RMm und PMn angehören; die Coordinate y wird nur in der ersten als eine willkührliche beständige Größe, welche die Lage der schneidenden Ebene bestimmt hereinkommen; auf eben die Art wird es mit der Coordinate x in der zweyten Section seyn. Man muß nicht das dz von einer dieser Gleichungen, mit dem dz von der andern Gleichung verwechseln: diese beyde Differentiale sind nur partielle, so wie man es in Nr. 30 hat bemerken müssen, denn das vollständige Differential, oder das Ensembel der Glieder der ersten Ordnung hat zum Ausdruck

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = pdx + qdy.$$

Ob man gleich keine besondre Bezeichnung um die zwey partielle Differentiale zu unterscheiden gebraucht, so ist es immer leicht sie durch die der beyden Anwüchse dx oder dy mit welchen sie behaftet sind, zu erkennen, wenn man also nur $dz = pdx$ hat, so ist dz das Differential

der

der Ordinate von der mit der Ebene der x's und z's parallelen Section; auf ähnliche Art ist $dz = qdy$, die, der Ordinate von der mit der Ebene der y's und z's parallelen Section. Wenn man $dy = mdx$ macht, so wird das vollständige Differential $dz = dx(p + mq)$ der Ordinate die durch die Ebene $M'M\,NN'$ (welche auf die der x's und y's senkrecht) gegebenen Section angehören, indem man $N'm' = m \times M'm'$ voraussetzt. Man wird analoge Dinge finden, indem man successive zur Ordinaten eine jede der veränderlichen Größen x und y nimmt, und die beyde andre als Abscissen betrachtet.

Die beyde Differentiale $dz = pdx$ und $dz = qdy$, sind untereinander durch die Bedingungsgleichung $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$ oder $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, verbunden, welche aus der Identität der beyden Entwickelungen von MN entstehet, und die nur der Ausdruck von der continuität der Oberfläche ist, Kraft welcher, so wie man es weiter oben hat sehen lassen, die beyde Sectionen pmN und rnN die durch die Abscissen Ap und Ar bestimmt sind, sich bey den Punct N schneiden müssen.

321.

Hat man diese Preliminarien wohl verstanden, so wird man ohne Mühe begreifen, daß wenn zwey Oberflächen durch den Punct gehen, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, und indem man x' in $x' + h$, y' in $y + k$, verwandelt, die Gleichung der ersten, giebt

$$\left.\begin{array}{l} z'+ph+gk \\ +\tfrac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2) \\ +\text{u. s. w.} \end{array}\right\} \text{und die der zweyten} \left\{\begin{array}{l} z'+Ph+Qk \\ +\tfrac{1}{2}(Rh^2+2Shk+Tk^2) \\ +\text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

so wird die Entfernung der N', correspondirenden Puncte, auf diese beyden Oberflächen seyn

$$(P-p)h+(Q-q)k$$
$$+\tfrac{1}{2}[(R-r)h^2+2(S-s)hk+(T-t)k^2]$$
$$+\text{u. s. w.}$$

Wenn man haben wird $P-p=0$, $Q-q=0$, so werden die vorgegebenen Oberflächen sich berühren, und ihre Berührung wird nur von der ersten Ordnung seyn; sie wird von der zweyten Ordnung seyn, wenn man zu gleicher Zeit haben wird $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$ u. s. w. Raisonnirt man im gegenwärtigen Fall so wie man es in Rücksicht auf den Curven (Nr. 259) gethan hat, so wird man sich überführen, daß jegliche Oberfläche, welche nicht diese Bedingungen erfüllen würde, nicht zwischen die beyden vorgegebenen durchgehen könnte, wenigstens, wenn man die Größen h und k klein genug nehmen wird, damit die Summe der Glieder der ersten Ordnung beträchtlicher sey, als die, von allen denjenigen der folgenden Ordnungen.

322.

Laßt uns zuerst voraussetzen, daß die vorgegebene Oberfläche, welche ich die berührende Oberfläche nennen werde, eine Ebene sey; wenn ihre Gleichung unter der Gestalt $z=Ax+By+D$ gesetzt ist, so wird sie geben $z'=Ax'+By'+D$, wenn man darin x, y und z in x' y' und z' verwandeln wird; nachher $x'+h$ und $y'+k$ an der Stelle von x' und y', setzt, so wird z' werden

$Ax' + By' + D + Ah + Bk$ oder $z' + Ah + Bk$. man wird also haben $P = A$ und $Q = B$, substituirt man diese Werthe in den Berührungs-Gleichungen $P - p = 0$ und $Q - q = 0$, so wird daraus hervorgehen $A = p$, $B = q$. Man wird D eliminiren, indem man die Gleichung $z' = Ax' + By' + D$ von der Gleichung $z = Ax + By + D$ abziehet; und schreibt man p statt A und q statt B, so wird die Gleichung

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y'),$$

die, der mit der ersten vorgegebenen Oberfläche tangentirende Ebene seyn.

Um davon eine Anwendung zu machen, werde ich die Gleichung

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 1^2$$

nehmen, welche successive in Beziehung auf x' und in Beziehung auf y differentiirt, geben wird

$$\left.\begin{array}{l} ax' + cz' \dfrac{dz'}{dx'} = 0 \\ by' + cz' \dfrac{dz'}{dy'} = 0 \end{array}\right\} \text{woraus} \left\{\begin{array}{l} p = -\dfrac{ax'}{cz'}, \\ q = -\dfrac{by'}{cz'}, \end{array}\right.$$

substituirt man diese Werthe, so wird kommen

$$z - z' = -\frac{ax'}{cz'}(x - x') - \frac{by'}{cz'}(y - y'),$$

bringt man alles zu einerley Nenner, so wird man ein Resultat bekommen, welches, Kraft der Vorgegebenen sich in

$$axx' + byy' + czz' = 1^2$$

verwandeln wird.

Wenn der Berührungspunct nicht auf der vorgegebenen Oberfläche gegeben wäre, man aber die Lage eines äußern Puncts kennte, durch welchen die geforderte tangentirende Ebene gehen müßte; und man α, β und γ, die Coordinaten dieses letzten Puncts nennt, da sie die

Gleichung, welche man so eben gefunden hat, gnügen sollten, so würde man haben

$$a\alpha x' + b\beta y' + c\gamma z' = 1^2,$$

ein Resultat, in welchem die Größen x', y' und z' die unbestimmten Größen sind, und welches, in Verbindung mit der vorgegebenen Gleichung, die Curve vorstellt, auf welcher sich alle gesuchte Berührungspuncte befinden, von welchen man leicht sehen kann, daß die Anzahl unendlich ist. Diese Curve ist eben, weil die eine der sie bestimmenden Gleichungen nur vom ersten Grade ist.

Die Durchschnitte der tangentirenden Ebene, mit zwey der coordinirten Ebenen, können zu ihrer Construktion dienen, so wie die Subtangente zur Construktion der Tangente der Curven, dient, und es ist zu leicht sie zu bestimmen, um daß es nöthig ist, mich in dieser Rücksicht, im geringsten Detail einzulassen.

323.

Die grade Linie, welche perpendicular auf der tangentirenden Ebene durch den vorgegebenen Punct geführt ist, heißt Normale und ihre Gleichungen sind nach dem was vorhergehet und in Rücksicht auf Nr. 301

$$x - x' + p(z - z') = 0, \qquad y - y' + q(z - z') = 0$$

Die Entfernung des Puncts M, von einem beliebigen auf dieser graden Linie genommnen Punct, wird zum Ausdruck haben

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = (z-z')\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Wenn man $z = 0$ macht, so wird das Resultat

$$-z'\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

die Länge des Theils MG der Normale, geben, welche zwischen der vorgegebenen Oberfläche und der Ebene der x's und y's enthalten ist.

Setzt

Setzt man statt p und q die, aus der Gleichung

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 1^2$$

gezogene Werthe, so wird kommen

$$MG = \frac{1}{c} \sqrt{a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2}:$$

wenn man haben wird $a = b = c$, so wird dieser Werth sich auf

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 1$$

reduciren, und in diesem Falle, wird die vorgegebene Oberfläche eine Kugel seyn, die ihren Mittelpunct beym Ursprung der Coordinaten und ihren Radius gleich 1 hat.

324.

Man hätte zur Gleichung der tangentirenden Ebene, durch mehrere andere Betrachtungen gelangen können; indem man sie zum Beyspiel betrachtet, als ob sie durch die drey unendlich nahe Puncte M, m und n gehen müßten, und indem man die beständigen Größen durch die Methode der Gränzen, oder durch die Methode der unendlich kleinen, bestimmt. Da diese Anwendungen, für diejenigen keine Schwierigkeiten haben, welche die Auflösung der analogen Fragen, in Beziehung auf den Curven, begriffen haben werden, so werde ich mich begnügen die Construktion der tangentirenden Ebene, welche man in Nr. 107 der Essais de Géométrie findet, in Analysis zu übersetzen.

Nach dieser Construktion, bestimmt sich die tangentirende Ebene, durch die grade Linien MT und Mt die respective die Sectionen RMm und PMn, in den Punct M berühren; da aber $\frac{dz'}{dx'}$, und $\frac{dz'}{dy'}$ die Differentialcoefficienten der Ordinate z' sind, welche successive in einer

jeden dieser Sectionen betrachtet ist, und da die grade Linien MT und Mt noch überdem parallel mit den Ebenen der x's und y's, und der y's und z's sind, so ist es leicht zu sehen, daß die Gleichungen von MT seyn werden

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x'), \quad y - y' = 0,$$

und daß die von Mt seyn werden

$$z - z' = \frac{dz'}{dy'}(y - y'), \quad x - x' = 0.$$

Jetzt, wenn man die Gleichung der tangentirenden Ebene durch

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y')$$

vorstellt, so ist es augenscheinlich, daß diese Gleichung mit dem vorhergehenden wird übereinstimmen müssen, und folglich muß man finden, indem man successive $y - y' = 0$ und $x - x' = 0$ macht,

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x'); \quad \text{und } z - z' = \frac{dz'}{dy'}(y - y');$$

sie giebt aber durch diese Voraussetzungen

$$z - z' = A(x - x'); \quad \text{und } z - z' = B(y - y'),$$

man wird also daraus, so wie in Nr. 322, schließen

$$A = \frac{dz'}{dx'} = p, \quad B = \frac{dz'}{dy'} = q.$$

Man könnte fürchten, daß die tangentirende Ebene, so bestimmt, wie man es so eben gesehen hat, nur die vorgegebene Oberfläche auf die beyden Sectionen, welche man betrachtet hat, berührte; indem man aber ihre Gleichung nur bloß in Beziehung auf x und y allein differentiirt, so wird man haben $dz = pdx + qdy$, welches beweiset, daß, wenn man nehmen wird, $dx = dx'$ und $dy = dy'$, so wird man haben $dz = dz'$, und daß folglich die Puncte der vorgegebenen Oberfläche, welche unmittel-

mittelbar den Punct M umgeben, alle mit die der tangentirenden Ebene zusammenfallen (oder sich decken), so lange man nur bloß Rücksicht auf den Größen der ersten Ordnung hat. Es folgt daraus, daß eine beliebige Ebene, die durch den Punct M geführt ist, die vorgegebene Oberfläche in einer Curve schneidet die, mit der tangentirenden Ebene, zwey gemeinschaftliche Puncte hat, oder, welches einerley ist, den Durchschnitt dieser Ebene mit der schneidenden Ebene zur Tangente hat. Ich bemerke übrigens, daß das was so eben a posteriori bewiesen worden ist, sich durch die Betrachtungen von Nr. 322 einsehen läßt. Wir wollen jetzt zur Untersuchung der Berührungskugeln der vorgegebenen Oberfläche übergehen.

325.

α, β nnd γ seyn dje Coordinaten des Mittelpuncts der berührenden Kugel und a ihr Radius, so wird sie zur Gleichung haben

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2.$$

Indem man successive in Betracht auf x und auf y differentiirt, so wird man finden

$$\frac{dz}{dx} = P = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad \frac{dz}{dy} = Q = -\frac{y-\beta}{z-\gamma},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = R = -\frac{1}{z-\gamma} + \frac{(x-\alpha)P}{(z-\gamma)^2} = -\frac{1+P^2}{z-\gamma}.$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = S = \frac{(x-\alpha)Q}{(z-\gamma)^2} = \frac{(y-\beta)P}{(z-\gamma)^2} = -\frac{PQ}{z-\gamma},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = T = -\frac{1}{z-\gamma} + \frac{(y-\beta)Q}{(z-\gamma)^2} = -\frac{1+Q^2}{z-\gamma}.$$

Weil die Kugel, welche wir betrachten, durch den Punct M gehen muß, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, so wird man zuerst haben

 (x'—

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = a^2 \ldots (1);$$

verändert man alsdann x in x', y in y' und z in z', in den Functionen P und Q, so werden die auf der Berührung der ersten Ordnung sich beziehende Bedingungen geben

$$p = -\frac{x' - \alpha}{z' - \gamma}, \quad q = -\frac{y' - \beta}{z' - \gamma},$$

oder, welches einerley ist

$$x' - \alpha + p(z' - \gamma) = 0 \ldots (2), \qquad y' - \beta + q(z' - \gamma) = 0 \ldots (3)$$

Diese Gleichungen welche, wenn man statt α, x und statt β, y setzt, dieselben, als die der Normale werden (Nr. 323), lehren uns, daß alle Kugeln, welche die vorgegebene berühren können, ihren Mittelpunct auf der Normale haben, die durch den Berührungspunct geführt ist.

Vermittelst der Gleichungen (1) (2) und (3), wird man drey der beständigen Größen α, β, γ und a bestimmen, und es wird nur eine Bedingung zu erfüllen übrig bleiben, um zu vollenden die Berührungskugel zu particularisiren: man wird also nicht insbesondre, eine jede der Gleichungen $R - r = 0$, $S - s = 0$, $T - t = 0$ befriedigen können, wenn man aber das Ensembel der Glieder der zweyten Ordnung in der Entwickelung von z' und von z (Nr. 321) vergleicht, so man wird die einzige Gleichung

$$Rh^2 + 2Shk + Tk^2 = rh^2 + 2shk + tk^2$$

haben, von welcher man wird Gebrauch machen können, um die vierte willkührliche beständige Größe zu bestimmen.

Diese Gleichung kann unter die Gestalt

$$R - r + 2(S - s)\frac{k}{h} + (T - t)\frac{k^2}{h^2} = 0$$

gesetzt werden.

Setzt man statt den Größen R, S, T, ihre, hier oben gefundene Werthe, und verwandelt man x in x', y in y'

z in

z in z', P in p, und Q in q, so wird kommen

$$\frac{1+p^2}{z'-\gamma}+r+2\left(\frac{pq}{z'-\gamma}+s\right)\frac{k}{h}+\left(\frac{1+q^2}{z'-\gamma}+t\right)\frac{k^2}{h^2}=0 \ldots (4).$$

Wenn diese Gleichung in Verbindung mit den vorhergehenden statt haben wird, so wird die Ordinate, welche auf den Punct dessen Abscissen $x'+h$ und $y'+k$ sind, errichtet, und bey der vorgegebenen Oberfläche begränzt ist, von die, der Berührungskugel nur in die Glieder von der dritten Ordnung unterschieden seyn: keine andre Kugel wird also zwischen die beyde Oberflächen durchgehen können, wenigstens in den Zwischenraum der den Punct M vom Punct N trennt, denn man muß wohl bemerken, daß, im allgemeinen, die Berührung (contact) nur eine Osculation nach der Richtung MN (welche der Linie M'N' auf welcher man $\frac{N'm'}{M'm'}=\frac{k}{h}$, entspricht) hat.

Wenn man $\frac{k}{h}=m$ macht, so wird man aus der Gleichung (4) ziehen

$$z'-\gamma=-\frac{1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2},$$

ein Werth, welchen wir der Kürze wegen durch M vorstellen werden; substituirt man sie in den Gleichungen (3) (2) und (1) so wird daraus hervorgehen

$$z'-\gamma=M,\quad (y'-\beta)=-qM,\quad x'-\alpha=-pM$$

$$a=M\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

326.

Die Betrachtung der Osculirungskugel giebt das Mittel an, die Krümmung einer vorgegebenen Oberfläche in ihre verschiedenen Puncte kennen zu lernen. In der

Thaat

That, wenn man eine beliebige Section MN sich gedenkt, welche in der vorgegebenen Oberfläche durch eine nach der Normale MG geführten Ebene gemacht ist, so ist es leicht zu sehen, daß sie zum Osculirungskreis den großen Kreis haben wird, in welchen die schneidende Ebene die Osculirungskugel begegnet; denn wenn es anders wäre, so könnte man einen Kreis durch den, von welchen man so eben gesprochen hat, und durch die Curve MN gehen lassen, und nichts würde hindern den letzten, als den obern Theil an einer Kugel zu betrachten, die auch ihren Mittelpunct auf der Normale hätte, die aber zwischen die Osculirungssphäre und die vorgegebene Oberfläche durchgehen würde, unmittelbar vor und nach dem Punct N, welches aber nicht geschehen kann.

Der hier oben gefundene Werth von a, ist also der Ausdruck vom Krümmungshalbmesser einer Section MN, die in der vorgegebenen Oberfläche durch die Ebene MNG, die längst der Normale geführt ist, (deren Lage übrigens beliebig seyn kann), gemacht ist. Wir werden in der Folge den Ausdruck des Krümmungshalbmesser einer Section die durch eine beliebige Ebene gemacht ist, geben.

327.

Unter die unendliche Anzahl von Werthen die, der Ausdruck von a annehmen kann, wenn man m alle mögliche Werthe giebt, wollen wir diejenigen suchen, welche Maxima oder Minima sind: um sie zu finden werden wir die Gleichung $\frac{da}{dm} = o$ haben, welche sich auf $\frac{dM}{dm} = o$ reduciren wird, weil die Größe m nur durch

den

den Factor M, in a hereinkommt, indem man aber den Nenner aus der Gleichung (4) von welchen der Werth von $z' - \gamma$, oder M abhängt, verschwinden läßt, so wird man haben

$$(r+2sm+tm^2)M+1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2=0 \ldots (5);$$

differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf m, und macht man $\frac{dM}{dm} = 0$ so wird kommen

$$(s + tm)M + pq + (1 + q^2)m = 0 \ldots\ldots (6),$$

woraus man ziehen wird $m = -\frac{pq+Ms}{(1+q^2)+Mt}$; substituirt man diesen Werth in der Gleichung (5) so wird daraus kommen

$$(1+p^2+rM)(1+q^2+tM)^2-(pq+sM)^2(1+q^2+tM)=0,$$

und indem man den gemeinschaftlichen Factor $1+q^2+tM$ supprimirt, so wird man nur

$$(1 + p^2 + rM)(1 + q^2 + tM) - (pq + sM)^2 = 0$$

finden. Ist dieses letzte Resultat entwickelt, und in Beziehung auf M geordnet, so wird kommen

$$M^2(rt-s^2)+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]M+1+p^2+q^2=0 (7);$$

macht man der Kürze wegen

$rt-s^2=e$, $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=f$, $1+p^2+q^2=g^2$,

und lößt man die, hier oben angeführte Gleichung in Beziehung auf M auf, so wird man bekommen

$$M = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4eg^2}}{2e},$$

welches geben wird

$$a = \frac{-fg \mp g\sqrt{f^2 - 4eg^2}}{2e}.$$

Von den beyden Werthen des Radius a, entspricht der eine dem Maximum der andre dem Minimum.

Um

Um jetzt zu wissen, in welcher Richtung die Osculation von einer jeden der Kugeln zu welchen diese Werthe gehören, geschiehet, so muß man m bestimmen, welches geschehen wird, indem man M aus der Gleichung (5) vermittelst seines Ausdrucks $M = -\frac{pq+(1+q^2)m}{s+tm}$, herausschaft, es wird alsdann nach den Reductionen und indem man in Beziehung auf m ordnet, kommen

$$m^2[(1+q^2)s - pqt] + m[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0 \quad (8).$$

328.

Eine einfache Veränderung der Coordinaten wird hinreichend seyn, um diese Gleichung so zu reduciren, daß man, die Beziehung, welche untereinander auf der vorgegebenen Oberfläche die gesuchte Richtungen haben, wahrnimmt. In der That, wenn man sich einbildet, daß die tangentirende Ebene die der x's und y's wird, welches immer möglich ist, und daß der durch M bezeichnete Punct, beym Ursprunge der Coordinaten gesetzt sey, so wird man nichts an der respectiven Lage der vorgegebenen Oberfläche und der Osculirungssphären verändern, man wird aber alsdann $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, $p=0$, $q=0$ haben, dadurch werden die Ausdrücke von Nr. 325, sich reduciren auf

$$\gamma = \frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}, \quad a = -\gamma;$$

die Größen α und β werden verschwinden, so wie es die Lage der Osculirungssphären erfordert, deren Mittelpunct in der Normale ist, welche die Axe der z's geworden ist; man wird endlich statt der Gleichung (8)

$m^2 s + m(r-t) - s = 0$, oder $m^2 + m\left(\frac{r-t}{s}\right) - 1 = 0$

haben.

Es ist leicht zu sehen, daß jetzt m oder $\frac{k}{h}$ die Tangente des Winkels vorstellt, welchen die grade Linie MN′ die die Projection N′ des Puncts N (Fig. 48) und den Ursprung M mit der Axe MP der xen bildet, und daß die, auf dieser graden Linie errichteten Ebene, perpendicular auf der Ebene der x's und y's welche alsdann durch die Normale MG gehet, den größten Kreis der Berührungskugel enthalten, und auf welchen die Osculation Statt haben wird (vorhergehende Nr). Aber indem man durch m′ und m′′ die beyden Werthe deren m fähig ist, bezeichnet, so wird man Kraft der obigen Gleichung $m'm'' + 1 = 0$ haben; woraus folgt, daß die Ebene des Berührungskreises MN die mit den größten Radius OM beschrieben ist, perpendicular auf der Ebene des zweyten Berührungskreises MN, mit den kleinsten Radius OM beschrieben ist.

329.

Um den Werth des Krümmungshalbmesser einer Section, welche in der vorgegebenen Oberfläche durch eine beliebige Ebene, längst der Normale geführt, gemacht ist, oder durch die neue Axe der z's zu finden, so würde es hinreichend seyn statt m in den oben gegebenen Ausdruck von γ die Tangente des Winkels, welchen diese Ebene mit der Ebene von x und z macht, zu substituiren. Man würde den Krümmungshalbmesser der Section, die durch diese letzte gemacht ist, bekommen, indem man k = 0

vor

voraussetzt, welches geben würde $m = 0$ und $\gamma = \frac{1}{\gamma}$.
Wenn man überdem also den Krümmungshalbmesser dieser Section kennte, so hätte man dadurch den Werth des Differentialcoefficienten γ in Beziehung auf dem neuen System der Coordinaten. Man wird ohne viele Schwierigkeit die beyde Coefficienten s und t bestimmen, wenn man a priori den Krümmungshalbmesser der beyden andern Sectionen kennen wird, welche mit der ersten gegebene Winkel macht, und ohne etwas von der Gleichung der vorgegebenen Oberfläche zu borgen, so wird man alsdann im Stande seyn, den Krümmungshalbmesser der Sectionen anzuzeigen die durch eine beliebige Ebene gemacht, welche durch die Axe der z's geführt ist, vorausgesetzt, daß man den Winkel hat, den diese Ebene mit einer der drey vorhergehenden Sectionen bildet; ein Umstand der bemerkt zu werden verdient.

In die Veränderung der Coordinaten, welche wir uns eingebildet haben, indem man die Normale für die Axe der z's und die tangentirende Ebene für die Ebene der xen und y's nimmt, haben wir nichts über die Lage der Axen dieser letzten Coordinaten festgesetzt; weil aber die Ebenen der Osculirungskreise des größten und kleinsten Radius, untereinander perpendicular sind, so können wir annehmen, daß die Ebene der xen und z's durch einen dieser Kreise geht, und daß die Ebene der y's und z's mit der andern sich deckt. Wir wollen also die Ebene N'MG für die der xen und z's und die Ebene n'MG für die der y's und z's nehmen. In dieser Veränderung verschwindet der Differentialcoefficient s; denn einer der Werthe von m, wird Null und der andre unendlich, und, wenn man sogleich in der Gleichung

$$m^2 s + m(r - t) - s = 0,$$

$m = 0$ macht, so wird daraus $s = 0$ hervorgehen: setzt man sie nachher unter die Gestalt

$$s + \frac{(r - t)}{m} - \frac{s}{m^2} = 0$$

so wird man versichert seyn, daß die Annahme von m unendlich, $s = 0$ giebt.

In dieser Hypothese wird man für eine Section die mit der Ebene der $x$en und z's einen beliebigen Winkel bildet, $\gamma = \frac{1 + m^2}{r + t m^2}$ haben, und nennt man γ diesen Winkel, von welcher m die Tangente ausdrückt, so wird man durch die Relationen der trigonometrischen Linien haben

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \sin V = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}},$$

und folglich

$$a = - \frac{1}{r \cos V^2 + t \sin V^2}.$$

Man kann die Größen r und t vermittelst des größten und kleinsten Krümmungshalbmesser ausdrücken, denn man hat für den ersten $V = 0$, und für den zweyten $V = 90°$; indem man den einen durch a' und den andern durch a'' bezeichnet, so wird man finden

$$a' = - \frac{1}{r}, \quad a'' = - \frac{1}{t}, \text{ woraus}$$

$$r = - \frac{1}{a'}, \quad t = - \frac{1}{a''} \text{ und}$$

$$a = - \frac{a' a''}{a' \cos V^2 + a'' \sin V^2}.$$

Es folgt daraus, daß der Krümmungshalbmesser einer beliebigen Section, der perpendicular auf der tangentirenden

Ebene ist, nur vom größten und vom kleinsten Krümmungshalbmesser und vom Winkel den die schneidende Ebene mit die, der Sectionen bildet, auf welchen diese Radii sich beziehen, abhängt.

330.

Wir wollen jetzt zu den Fall zurückkehren, wo die Lage der coordinirten Ebenen beliebig ist, und sehen, wie man in Rücksicht auf diesen Ebenen, die Lage derjenigen finden kann, welche den größten und kleinsten Osculirungskreis enthalten. Die Art und Weise die sich uns zuerst darbietet bestehet darin, die Transformation der Coordinaten, welche wir in Nr. 326 begriffen haben, auszuführen, und nachher auf der tangentirenden Ebene, welche die der Abscissen geworden ist, die Richtung der Axen dieser letztern, durch die Bedingung, daß der Differentialcoefficient s verschwinde, (vorhergehende Nr.) zu bestimmen. Es hat uns aber einfacher und allgemeiner geschienen die Größe m oder das Verhältniß $\frac{k}{h}$ vermittelst der beständigen Größen, welche die Lage der schneidenden Ebene MNG (Fig. 47) particularisiren, zu bestimmen, und folgendes ist das Mittel wie man dazu gelangen kann.

Man wird bemerken, daß jemehr der Punct N dem Puncte M nahe ist, um so viel mehr wird die Section MN sich nähern mit ihre Tangente zusammenzufallen: die Tangente ist nichts anders, als die grade Linie nach welcher die schneidende Ebene, diejenige begegnet, welche die vorgegebene Oberfläche in M berührt, und um so viel mehr wird auch die grade M′N′ sich nähern die Projection dieser Tangente zu werden. Wenn dieses festgesetzt ist,

ist, und man durch

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y')$$

die Gleichung der schneidenden Ebene vorstellt, so wird man finden, daß die von der Projection ihres Durchschnitts mit der tangentirenden Ebene, auf der Ebene der x's und y's

$$(p - A)(x - x') + (q - B)(y - y') = 0$$

seyn wird; und setzt man voraus, daß x und y die Abscissen des Puncts N seyn, so wird man haben $x - x' = h$ und $y - y' = k$, woraus man ziehen wird

$$\frac{k}{h} = m = - \frac{p - A}{q - B},$$

für die Grenze des Verhältniß welche untereinander die Größen h und k haben können, die, nach den gebrauchten Principien in der Untersuchung der Osculirungskugel (Nr. 321) so klein als man will sollen angenommen werden können. Substituirt man den Werth von m in den von M so wird der Ausdruck des Krümmungshalbmesser nur von den beständigen Größen A und B abhangen; man muß aber bemerken, daß weil die schneidende Ebene durch die Normale MG gehet, so existirt eine nothwendige Relation zwischen A und B. In der That, muß die Gleichung dieser Ebene identisch werden, wenn man darin statt $x - x'$ und $y - y'$ ihre aus den Gleichungen der Normale (Nr. 323) gezogenen Werthe setzen wird. Effectuirt man die Substitution und dividirt durch $z - z'$, so wird man finden

$$1 = - Ap - Bq.$$

Es würde jetzt leicht seyn eine der Größen A und B des Ausdrucks von m zu vertreiben, und setzt man das Resultat in der Gleichung (8), so würde man diejenige haben, welche die Lage der Ebenen, die den

 größ=

größten und kleinsten Osculirungskreis enthalten, geben soll.

331.

Die Betrachtung der auf einander folgenden Normalen, welche uns zum Ausdruck des Krümmungshalbmesser der Curven (Nr. 289) geführt hat, wird eben so auf den Oberflächen angewendet, und verbreitet ein neues Licht über die besondre Eigenschaften des größten und kleinsten Krümmungshalbmesser. Man hat gesehen (Nr. 323) daß die Gleichungen der Normale waren

$$(x - x') + (z - z')\, p = 0 \ldots\ldots (a),$$

$$(y - y') + (z - z')\, q = 0 \ldots\ldots (b);$$

die Größen x', y', z', p und q, den Punct zugehörig, welchen man auf der vorgegebenen Oberfläche betrachtet, sind beständig für dieselbe Normale, sie verändern aber ihren Werth, wenn man zu einer zweyten Normale, welche auf die erstere folgt, übergeht; dieser Durchgang kann aber in einer unendlichen Anzahl von Richtungen geschehen, nemlich, von dem Punct M zu einem jeden der umgebenden Puncte: man muß also, um alle nur mögliche Fälle zu umfassen, zu gleicher Zeit x', y' und z', verändern lassen, und da man nur den Durchschnittspunct der ersten Normale mit der zweyten sucht, so wird man die Coordinaten x, y und z, womit dieser Punct behaftet ist, als beständig betrachten. Differentiirt man unter diesem Gesichtspuncte die Gleichungen (a) und (b), und betrachtet man daß $dz' = p dx' + q dy'$,

$$dp = d\,.\,\frac{dz'}{dx'} = \frac{d^2z'}{dx'^2}\,dx' + \frac{d^2z'}{dx'dy'}\,dy' = r dx' + s dy',$$

$$dq = d\,.\,\frac{dz'}{dy'} = \frac{d^2z'}{dx'dy'}\,dx' + \frac{d^2z'}{dy'^2}\,dy' = s dx' + t dy',$$ ist,

so

so wird man finden

$$-dx'-p^2dx'-pqdy'+(z-z')(rdx'+sdy')=0\ldots.(c)$$

$$-dy'-q^2dy'-pqdx'+(z-z')(sdx'+tdy')=0\ldots.(d).$$

Geben die Gleichungen (a) und (b) die Werthe von $x-x'$ und von $y-y'$, wenn die Gleichung von $z-z'$ bekannt seyn wird, so müssen, damit die vorgegebene Frage eine Auflösung hat, die beyde Gleichungen (c) und (d) in der Bestimmung dieser letztern Größe übereinstimmen. Das Resultat welches man bekommen wird, indem man $z-z'$ eliminirt, wird nur noch die einzige Größe $\frac{dy'}{dx'}$ enthalten, welche nicht durch die Natur der Frage gegeben sey, und von der sie den Werth particularisiren wird; diese Größe zeigt uns die Richtung der graden Linie $M'N'$, welche die Projectionen der beyden aufeinander folgenden Puncte, die man betrachtet, oder, was einerley ist, die Gränze der Größe m (vorhergehende Nr.) verbindet; es folgt also daraus, daß, um zwey sich schneidende Normalen zu finden, oder die in einerley Ebene liegen, man nicht ohne Unterschied von einem Punct zum andern auf der vorgegebenen Oberfläche gehen kann.

Wenn man zuerst $\frac{dy'}{dx'}$ aus der Gleichung (c) und (d) verjaget, so wird man, um $z-z'$ zu bestimmen, eine Gleichung haben, die, indem man z in γ verwandelt, in der Gleichung (7) (Nr. 327) eingehen wird; und wenn man $z-z'$ aus den nemlichen Gleichungen eliminiren wird, so wird das Resultat, welches $\frac{dy'}{dx'}$ anzeigt, dasselbe seyn als die Gleichung (8), welche die Werthe von m enthält: der größte und kleinste Osculirungskreis, werden also ihren Mittelpunct beym Durchschnitte, der bey-

den, aufeinander folgenden Normalen haben, ein Kennzeichen (caractère) welches sie auf einer bemerkungswerthen Art, von allen andern Berührungskreisen unterscheidet, und welches wie man sieht, uns ein, sie leicht zu bestimmendes Mittel darbietet.

Ich lasse bemerken, daß man unter einer sehr einfachen Gestalt, die Gleichung von welcher $\frac{dy'}{dx'}$ abhängt, bekommen kann, indem man in den Gleichungen (c) und (d), dz' statt $pdx' + qdy'$, dp statt $rdx' + sdy'$, dq statt $sdx' + tdy'$; denn nachdem man $z - z'$ eliminirt hat, so wird man alsdann finden

$$dp(dy' + qdz') - dq\,(dx' + pdz') = 0 \ldots (e)$$

Da der Werth von $\frac{dy'}{dx'}$ als Function von x', y' und z' gegeben ist, so verändert er sich für jeden Punct der vorgegebenen Oberfläche; die Lage des Puncts M bestimmt die Richtung in welcher man zum andern Punct N gehen muß; aus der Lage dieses letztern ziehet man eine neue Richtung, auf welcher sich der dritte befindet, und so immer näher und näher. Ein jeder Punct der vorgegebenen Oberfläche gehört also auf der Art zu einer Reihe von Puncten, welche durch die Bedingung, daß ihre Normalen sich zwey und zwey aufeinander folgend, schneiden, verbunden sind. Diese Puncte bilden eine Curve auf der vorgegebenen Oberfläche, und ihre Projectionen bilden daraus auf der Ebene der x's und y's eine andre wovon M'N' eine kleine Seite vorstellt, und folglich hat die Tangente zur Gleichung $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$.

Was wir so eben, für einen Werth von $\frac{dy'}{dx'}$ gesagt

haben,

haben, muß auch insbesondre bey einem jeden der Werthe welche diese Gleichung haben muß, angewendet werden; man sieht daraus, daß der Punct M sich auf zwey Curven befindet die sich in einem rechten Winkel schneiden, und davon eine den größten Krümmungshalbmesser und die andre den kleinsten entspricht. Diese Curven heißen **Krümmungslinien.**

In der Kugel, von welcher alle Normalen durch den Mittelpunct gehen, sind die Krümmungslinien nichts anders als die größten Kreise und es giebt deren folglich eine unendliche Anzahl für jeden Punct. Dieser Umstand ist durch die vorhergehende Theorie zu erkennen; denn indem man statt p, q, r, s und t, ihren Werth in der Gleichung (e) setzte, so würde sie identisch werden unabhängig von keinem Verhältniße zwischen dx' und dy'.

Wenn man die Coordinaten α, β, γ der Mittelpunct des größten oder des kleinsten Berührungskreises (Nr. 325) oder was einerley ist die Coordinaten x, y und z die den Durchschnitten der beyden aufeinander folgenden Normalen entsprechen, bestimmt haben wird, wenn man x', y' und z', zwischen den erhaltenen Resultaten und der Gleichung der vorgegebenen Oberfläche eliminirt, so wird man die der krummen Oberfläche haben welche der Ort von allen Mittelpuncten der größten und kleinsten Krümmung ist. Diese letzte Oberfläche ist überhaupt eine einzige Oberfläche davon eine Nappe die Mittelpuncte der größten Krümmung und die andre die der kleinsten enthält; dennoch aber, wenn die Gleichung (7) die den Werth von $z' - \gamma$ giebt, sich in zwey rationelle Factoren zertheilt, so kommen daraus zwey unterschiedene Oberflächen.

332.

Die Bedingungen der Berührung von zwey Oberflächen, können von der Deckung ihrer aufeinander folgenden Puncte abgeleitet werden. Stellt man durch x', y', z' die Coordinaten der vorgegebenen Oberfläche, und durch x, y, z, die, der berührenden Oberfläche vor, so muß zuerst, damit die zweyte durch denselben Punct als die erste geht: indem man $x = x'$, $y = y'$ macht, $z = z'$ kommen: nachgehends, um eine Berührung der ersten Ordnung auf alle Sectionen die man durch denselben Punct in der einen und in der andern Oberfläche machen kann, zu haben, so muß die Gleichung $dz = dz'$, oder $Pdx' + Qdy' = pdx' + qdy'$, unabhängig von dx' und dy' befriedigt seyn, welches $P-p=0$, $Q-q=0$ erfordert, so wie man es schon (Nr. 321) gesehen hat. Vergleicht man die zweyten Differentiale, um eine Berührung der zweyten Ordnung zu bekommen, so wird man machen $d^2z = d^2z'$ oder

$$Rdx'^2 + 2Sdx'dy' + Tdy'^2 = rdx'^2 + 2sdx'dy' + tdy'^2;$$

wenn diese Gleichung sich unabhängig von dx und dy, wahr gefunden wird, d. h. wenn man einzeln $R - r = 0$, $S - s = 0$, $T - t = 0$ haben wird, so wird die Berührung auf alle Linien von der zweyten Ordnung seyn, nach welchen durch den Punct den man betrachtet, geführte Ebenen, die beyde vorgegebenen Oberfläche schneiden werden. Diese Resultate sind völlig mit den in Nr. 321 übereinstimmend: wenn man nur über den Geist der Methode welche uns in einem und dem andern Falle dahin geführt haben, nachdenkt, so wird man sehen, daß sie im wesentlichen nicht differiren und daß die zweyte über der ersten den Vortheil hat, mit mehr Kürze ausgedrückt werden, zu können. Man könnte diese Betrachtungen so weit

fort führen als man wollte, ohne die geringste Schwierigkeit zu begegnen; wir wollen uns also dabey nicht aufhalten.

333.

Da eine vollständige Berührung der zweyten Ordnung sechs zu erfüllende Bedingungen erfordert, so folgt daraus daß die Gleichung der berührenden Oberfläche eine ähnliche Anzahl von beständigen willkührlichen Größen enthalten muß, und daß folglich die einfachste Gleichung die man für diese Oberfläche nehmen könnte, nur von der Gestalt

$$z = Ax + 2Bx + 2Cy + Dx^2 + 2Exy + Fy^2$$

seyn kann.

Wenn die Abscissen x und y in der tangentirenden Ebene lägen, und die Axe der z's sich mit der Normale deckte, da man alsdann $p = P = 0$, $q = Q = 0$ hätte, so würde die obengenannte Gleichung sich zu

$$z = Dx^2 + 2Exy + Fy^2$$

reduciren; nimmt man zu den Ebenen der $x$en und z's und der y's und z's, die welche den größten und kleinsten Berührungskreis enthalten, so würde man haben $s = S = 0$, woraus $E = 0$, und es würde für die berührenden Oberfläche diese sehr einfache Gleichung $z = Dx^2 + Fy^2$, welche zu den Oberflächen der zweyten Ordnung gehört, die in Nr. 315 betrachtet sind, kommen.

Es ist evident, daß zwey Oberflächen die eine vollständige Berührung der zweyten Ordnung haben, auch bey diesem Punct dieselbe Krümmung in allen Richtungen haben. Man kann auch beweisen, daß, wenn zwey Oberflächen die durch einerley Punct gehen, ihre größten und kleinsten Krümmungshalbmesser respective gleich haben,

auch untereinander eine vollständige Berührung der zweyten Ordnung haben; in der That, wenn man die eine und die andre auf der ihnen gemeinschaftlichen tangentirenden Ebene und auf den Ebenen ihres größten und kleinsten Berührungskreises beziehet, so vernichten sich ihre erste Differential-Gleichungen, und ihre zweyte Differential-Gleichungen werden

$$d^2z' = rdx'^2 + tdy'^2, \qquad d^2z = Rdx^2 + Tdy^2.$$

Wenn der Krümmungshalbmesser a' und a'' (Nr. 329), für die eine und die andre dieselben sind, so wird man daraus ziehen $r = R$ und $t = T$.

Es folgt daraus, daß die durch die Umdrehung des größten Berührungskreises MN (Fig. 48) um der graden Linie oH (die durch den Mittelpunct o des kleinsten Berührungskreises und senkrecht auf ihrer Ebene geführt ist) erzeugte Oberfläche, eine vollständige Berührung der zweyten Ordnung mit ihrer vorgegebenen Oberfläche hat, und daß es dasselbe seyn würde mit der, welche die Umdrehung des kleinsten Berührungskreises Mn um einer graden Linie, die durch den Mittelpunct O des größten, und perpendicular auf ihrer Ebene geführt ist, hervor bringen würde.

334.

Um, in Betracht der krummen Oberflächen denselben Gang zu folgen, als in Betracht der krummen Linien, so wollen wir uns jetzt mit der Untersuchung der Gleichung einer Oberfläche beschäftigen, die durch den successiven Sectionen einer unendlichen Anzahl anderer von einer gegebenen Natur, gebildet ist, d. h. von einerley allgemeinen Gleichung abgeleitet, die eine willkührliche beständige Größe m enthält, welcher man alle mögliche

liche Werthe giebt. Es ist evident, daß zwey dieser aus den sehr wenig unterschiedenen Werthen von m hervorgehenden Oberflächen nothwendig eine von der andern sehr nahe seyn, und sich nach einer Linie werden schneiden können; gedenkt man sich eine Reihe von Oberflächen die, nach einem gewissen Gesetz sich immer mehr und mehr nähernd, auf einander folgen, so werden ihre successiven Durchschnitte, indem sie sich immer mehr und mehr zusammen ziehen, einen Raum bestimmen, dessen gesuchte Oberfläche die Gränze seyn wird: unter diesen Nahmen werden wir sie von nun an bezeichnen.

Laßt uns zu den Erzeugungs-Oberflächen eine Reihe von Ebenen nehmen, die alle durch einerley Punct gehen; ihre Gleichungen können nur von der Gestalt

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + C(z - \gamma) = 0$$

seyn, und die besondre Lage einer jeden wird nur von den Verhältnissen $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ abhangen, welche wir, um abzukürzen, durch m und n vorstellen werden. Nachdem dieses festgesetzt ist, müssen wir bemerken, daß diese beyde Größen untereinander verbunden sind, dergestalt, daß man $m = f(n)$ hätte, wo die Caracteristick f eine gegebene Function bezeichnet; die vorhergehende Gleichung wird werden

$$f(n)\,(x - \alpha) + n(y - \beta) + (z - \gamma) = 0 \ldots (1);$$

und um von einer Ebene zu der, die derselben unmittelbar folgt, zu gelangen, so wird man nur allein die Größe n veränderen müssen, weil, da die Coordinaten x, y und z, an den Puncten der graden Linie haften, nach welcher sich die beyden vorgegebenen Ebenen schneiden werden, der einen und der andern gemeinschaftlich sind; diese Betrachtung wird geben

$$f'(n)(x-\alpha)+(y-\beta)=0\ldots(2),$$

indem man $df(n)=f'(n)dn$ macht, und durch dn dividirt. Es ist sogleich sichtbar, daß wenn die Gestalt der Function $f(n)$ bekannt seyn wird, man n zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden eliminiren wird, und es wird daraus die der gesuchten Oberfläche entstehen: ich werde aber überdies noch bemerken lassen, daß die Eliminirung noch statt haben kann, indem man die Function f gänzlich unbestimmt läßt. In der That, weil man aus der Gleichung (2), $f'(n)=-\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ ziehen kann, so muß man daraus schließen, daß die Größe n eine Function der Größe $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ ist, eine Function, die man in ihrer unbestimmten Lage, durch die Caracteristik ψ bezeichnen wird, und man wird haben $n=\psi\frac{y-\beta}{x-\alpha}$. Substituirt man diesen Ausdruck in der Gleichung (1) so wird kommen

$$(x-\alpha)f\left[\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]+(y-\beta)\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)+z-\gamma=0.$$

Giebt man diesem Resultate die Gestalt

$$-f\left[\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]-\frac{y-\beta}{x-\alpha}\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=\frac{z-\gamma}{x-\alpha},$$

so ist es leicht zu sehen, daß die erste Hälfte eine Function $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ ist; man kann sie also durch $\phi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$ vorstellen; und es wird kommen

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\phi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

Dieses ist die Gestalt der allgemeinen Gleichung derjenigen Oberflächen, welche die Gränzen einer unendlichen Anzahl Ebenen sind, die alle durch den Punct, dessen

Coor-

Coordinaten α, β und γ, sind, gehen, und überdies nach einem beliebigen Gesetz aufeinander folgen. Diese Erzeugung begreift alle conischen Oberflächen in sich; denn die Durchschnitte der aufeinanderfolgenden Ebenen, werden grade Linien seyn, die durch den, den Ebenen gemeinschaftlichen Punct geführt sind.

Das Verfahren welches ich in Nr. 314 angezeigt habe, um eine conische Oberfläche zu erkennen, führt zu demselben Resultate; denn um, so wie es das Verfahren mit sich bringt, den Ursprung zu dem Puncte hinzuversetzen, dessen Coordinaten α, β, γ sind, muß man $x'+\alpha$, $y'+\beta$, $z'+\gamma$, statt x, y und z substituiren, und da das Resultat in Beziehung auf x', y' und z', gleichartig wird, wenn man darin $z'=mx'$ und $y'=nx'$ macht, so wird es zu einer Function von m und n werden, und wird durch $f(m, n)=0$ vorgestellt werden können; aber wegen $x'=x-\alpha$, $y'=y-\beta$, $z'=z-\gamma$, wird man haben $m=\frac{z-\gamma}{x-\alpha}$ $n=\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ und folglich $f\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha}, \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=0$.

Da die beyde Größen $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}$ und $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, durch einerley Gleichung verbunden sind, so kann man daraus wie hier oben schließen, daß die eine, eine Function von der andern ist.

Es leuchtet nicht sogleich ein, daß man von der Gleichung $\frac{z-\gamma}{x-}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$, Gebrauch machen könnte, um zu erkennen ob eine vorgegebene Gleichung einer conischen Oberfläche angehört, oder nicht angehört, eliminirt man aber die unbestimmte Function von φ, durch das in Nr. 83 angezeigte Verfahren, und macht man immer zur

Ver-

Verkürzung $dz = pdx + qdy$, so wird man finden

$$z - \gamma = p(x - \alpha) + q(y - \beta).$$

Dieses Resultat drückt die Relation aus, welche zwischen der Ordinate z, seinen Differentialcoefficienten, und den Abscissen x und y, für alle conische Oberflächen statt finden muß; und es wird dazu dienen, die Gleichung einer Oberfläche dieser Famillie zu erkennen, so wie die in der angeführten Nr. erhaltenen Gleichung, die Functionen von $ax + by$ zu erkennen, dienet.

Die unbekannte oder willkührliche Function φ bestimmet sich durch die Bedingungen, welche die vorgegebene Oberfläche particularisiren; eine der einfachsten besteht in der Voraussetzung, daß diese Oberfläche durch eine gegebene Curve gehen soll. Es seyen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ die Gleichungen der beyden Oberflächen, welche die in Rede stehende Curve enthalten; es müssen zu gleicher Zeit in jedem Puncte dieser Curve, die drey folgenden Gleichungen:

$$\frac{z - \gamma}{x - \alpha} = \varphi\left(\frac{y - \beta}{x - \alpha}\right),\ F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

statt haben.

Laßt uns $\frac{y - \beta}{x - \alpha} = t$ machen, so wird kommen $\frac{z - \gamma}{x - \alpha} = \varphi(t)$; und nachher annehmen, daß man x, y und z, zwischen diesen beyden letzten Gleichungen und den Gleichungen $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$, eliminirt hätte, so wird nothwendig eine Gleichung zwischen t und $\varphi(t)$ bleiben, die wir durch $f[t, \varphi(t)] = 0$ vorstellen werden; setzt man für t und $\varphi(t)$ die Größen welche sie ausdrücken, so werden wir die Gleichung der gesuchten conischen Oberfläche haben.

Man

Man kann sich noch vornehmen, den Kegel der um einer gegebenen Oberfläche beschrieben ist, zu bestimmen. In diesem Falle muß man zuerst die Gleichungen der Curve suchen, nach welcher der Kegel diese Oberfläche berühren muß, und es ist leicht zu sehen, daß dieses darauf hinausläuft, den Ort der Puncte zu finden, wo sie durch eine Reihe von Ebenen berührt ist, die durch den Scheitel des Kegels geführt sind, eine Frage, die wir schon in (Nr. 322) für die, in der Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = l^2$$

begriffene Oberflächen, aufgelößt haben, und zwar durch ein Verfahren, daß sich auf jede beliebigen Oberfläche ausdehnt. Es bedarf im Grunde nur der Combinirung der Gleichung der gegebenen Oberfläche mit der Gleichung der Berührungsebene die unter der Gestalt

$$z - \gamma = p(x - \alpha) + q(y - \beta)$$

gesetzt ist; hat man alsdann die Gleichungen der beyden Oberflächen welche die Curve enthalten durch welche der gesuchte Kegel gehen muß, so wird man sich so wie vorher der willkührlichen Function entledigen. Im gegenwärtigen Beyspiele ist die Curve die der Ort aller Berührungen ist, durch die Gleichungen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = l^2, \qquad a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = l^2$$

vorgestellt. Verbindet man diese letzte Gleichung mit $\frac{z - \gamma}{x - \alpha} = t$ und $\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \varphi(t)$, so wird man die erste so reduciren, daß sie nur noch t und $\varphi(t)$ enthält, und wenn man nachher für diese Größen ihren Werth setzt, so wird daraus die Gleichung des geforderten Kegels kommen.

Es ist hier am rechten Ort zu bemerken, daß man, in dem Vorhergehenden die Mittel hat, die vornehmsten Auf-

Aufgaben der Perspective und der Theorie der Schatten analytisch aufzulösen (E S. 109 und 114).

335.

Die cylindrischen Oberflächen können betrachtet werden als ob sie durch die successiven Durchschnitte einer Reihe von Ebenen, die nach einem gewissen Gesetz geführt und perpendicular auf einer gegebenen Ebene sind, hervorgebracht werden. Es sey

$$ax + by + cz = o$$

die Gleichung dieser letzten Ebene, und

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

die Gleichung einer jeden beliebigen dieser ersten, man wird sogleich haben

$$Aa + Bb + Cc = o \text{ (Nr. 304)}$$

und macht man

$$\frac{A}{C} = m \quad \frac{B}{C} = n,$$

so wird kommen

$$n = -\frac{c + am}{b};$$

setzt man nachher die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

unter die Gestalt

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z + \frac{D}{C} = o,$$

so wird daraus hervorgehen

$$m(bx - ay) + bz - cy + \frac{bD}{C} = o:$$

die Lage der, durch diese Gleichung vorgestellten Ebene, hängt nur bloß noch von den beyden Größen m und $\frac{bD}{C}$ ab.

Setzt

Setzt man voraus, daß die zweyte eine Function der ersten, so sey werden wir haben

$$m(bx - ay) + bz - cy + f(m) = 0 \ldots (1)$$

Geht man nachher zu der gleich folgenden Ebene über, indem man in Beziehung auf m allein differentiirt, so werden wir bekommen

$$bx - ay + f'(m) = 0 \ldots (2).$$

Wenn die Gestalt der Function f gegeben seyn wird, so wird man m zwischen diese zwey Gleichungen eliminiren; raisonnirt man aber so wie in der vorhergehenden Num. so wird man finden $m = \psi(bx - ay)$, woraus

$$(bx-ay)\psi(bx-ay)+f[\psi(bx-ay)]+bz-cy=0;$$

und man wird daraus schließen, daß die allgemeine Gleichung der cylindrischen Oberfläche, von der Gestalt

$$bz - cy = \phi(bx - ay)$$

seyn wird. Eliminirt man die willkührliche Function ϕ, so wird kommen $ap + bq - c = 0$. Man würde die willkührliche Function, so wie für die conischen Oberflächen bestimmen.

336.

Wir wollen eine Reihe Kugeln betrachten, die ihren Mittelpunct auf einerley graden Linie haben, eine jede derselben wird die nächst auf ihr in einem Kreise folgende schneiden, deren Ebene perpendicular auf der Linie seyn wird, die alle Mittelpuncte verbindet; die Sammlung der Durchschnitte dieser Kugeln die, je zwey u. zwey aufeinanderfolgend genommen, wird also eine Oberfläche bilden die, nachdem sie durch eine Ebene, die perpendicular auf der vorgegebenen graden Linie ist, geschnitten wäre, immer einen Kreis geben wird, und folglich durch die Umdrehung einer gewissen Curve um dieser graden Linie, hervorgebracht seyn wird.

Um diese Erzeugung analytisch auszudrücken, so werden wir durch $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$ die Gleichungen der Umdrehungsaxe vorstellen; die, der Kugeln deren Mittelpunct sich auf dieser Axe befindet, wird seyn $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=n^2$, und um sie zu particularisiren, wird es hinreichend seyn eine der Coordinaten ihres Mittelpuncts zu finden. Man mache $z'=m$, so wird Kraft der Gleichungen der Umdrehungsaxe

$$x' = am + \alpha, \quad y' = bm + \beta$$

kommen; substituirt man diese Werthe in der Gleichung der Kugel, so wird es leicht seyn ihr die Gestalt

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2+2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z] \\ \qquad +a^2m^2+b^2m^2+m^2-n^2\end{array}\right\} = 0$$

zu geben.

Setzt man nachher fest, daß die Größe des Halbmessers einer jeden Kugel, von der Lage ihres Mittelpuncts abhängt, so wird man $a^2m^2+b^2m^2+m^2-n^2=f(m)$ voraussetzen können, wonach sich die obige Gleichung in

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2+2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z]+f(m)=0 \; (1)$$

verwandeln wird.

Geht man zu der gleich darauf folgenden Kugel, so wird man haben

$$2[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z]+f'(m)=0 \ldots (2)$$

Wenn die Function $f(m)$ nicht bestimmt ist, so wird man aus dieser letzten Gleichung $m=\psi[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z]$ ziehen, und substituirt man diesen Ausdruck in der Gleichung (1), so wird kommen

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\varphi[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z].$$

Wenn die Umdrehungsaxe durch den Ursprung der Coordinaten ginge, so würde man haben $\alpha=0$, $\beta=0$, und die obige Gleichung würde sich auf $x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+z)$ reduciren endlich, wenn diese Axe mit die der z's sich

deckte,

deckte, so würde man überdies $a=0$, $b=0$ haben, und es würde kommen $x^2+y^2+z^2=\varphi(z)$, oder $z=*(x^2+y^2)$.

Eliminirt man die willkührliche Function der allgemeinen Gleichung, so wird man

$$(x-\alpha)(b+q)-(y-\beta)(a+p)+z(bp-aq)=0$$

bekommen, eine Bedingungsgleichung, vermittelst welcher man erkennen wird, daß eine vorgegebene Oberfläche, durch Umdrehung entstanden ist, oder nicht, und daß sie im ersten Fall, die Lage ihrer Axe ist: führt man nachher eine beliebige Ebene durch diese grade Linie, so wird man die Erzeugungscurve haben.

In den drey Famillien der Oberflächen, von welche wir so eben die allgemeine Gleichung bestimmt haben, hat die Eliminirung der Größe m geschehen können, nicht eben so wird es sich in der folgenden Frage verhalten, welche die wichtigsten particularitäten der Theorie, die wir jetzt vortragen enthält, und deren Resultate das größte Licht über einen der vorzüglichsten Zweige des Integralcalculs verbreiten werden.

337.

Es sey vorgegeben die allgemeine Gleichung der krummen Oberflächen zu finden, die durch die successiven Durchschnitte einer Reihe von Kugeln, die mit einerley Radius beschrieben, und wovon alle Mittelpuncte in der Ebene der x's und y's auf einer gegebenen Curve, liegen, gebildet sind. Diese Oberflächen sind ein besondrer Fall der ringförmigen Oberflächen (E Nr. 98) welche wir weiter unten in ihrer ganzen Ausdehnung betrachten werden. Nennt man x' und y' die Coordinaten der gegebenen Curve und a der Radius aller Kugeln, so wird die allgemeine Gleichung dieser Oberflächen seyn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 = a^2.$$

Wenn man die insbesondre betrachtet, für welche man hat $x' = m$, $y' = n$, und man durch $n = \varphi(m)$ die Relation betrachtet die zwischen m und n statt finden muß, Kraft der Gleichung der Curven von den Mittelpuncten, so wird man für eine Kugel und ihre nächstfolgende

$$[x - m]^2 + [y - \varphi(m)]^2 + z^2 = a^2 \quad \ldots (1)$$

$$x - m \quad + [y - \varphi(m)] \cdot \varphi'(m) = 0 \quad \ldots (2)$$

haben.

Die Gleichung (2) welche die Größe m enthält, die in verschiedene Functionen verwickelt und mit den veränderlichen Größen x und y combinirt ist, kann nicht mehr unmittelbar diese Größe geben, wie in den vorhergehenden Beyspielen. Alles was man erhalten kann, so lange als die Gestalt der Function φ unbestimmt seyn wird, ist eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen x, y und z und den Differentialcoefficienten p und q. Um dahin zu gelangen wird man successive die erste Gleichung indem man m als beständig betrachtet, in Beziehung auf x und auf y differentiiren; denn es ist leicht zu sehen, daß Kraft der Gleichung (2), alle aus der Veränderung von m entstehenden Glieder, sey es in Beziehung auf x, oder auf y, Null seyn werden. Nach dieser Betrachtung wird man finden

$$x - m + zp = 0, \qquad y - \varphi(m) + zq = 0.$$

Setzt man in der Gleichung (1) statt $x-m$ und $y-\varphi(m)$, die Werthe welche diese letzte Gleichungen geben, so wird kommen

$$(1 + p^2 + q^2) z^2 = a^2;$$

welches zeiget, daß in allen gesuchten Oberflächen die Länge der Normale in Rücksicht auf der Ebene der x's und y's genommen, beständig ist (Nr. 323); ein Resultat, das

man

man überdem nach ihrer Erzeugung vorhersehen konnte. In der That wird man mit ein wenig Aufmerksamkeit bald sehen, daß eine beliebige dieser Oberflächen betrachtet werden kann, als ob sie aus einer unendlichen Anzahl unendlich schmaler Zonen bestünde, auf eine jede der Kugeln genommen, die zu ihrer Entstehung beytragen; Zonen die auf diese Kugel durch ihre Durchschnitte mit der ihr vorhergehenden und mit der folgenden bestimmt sind; da jede dieser Zonen die Eigenschaft der Kugel genießt, so wird ihre Gränze oder die gesuchte Oberfläche, solche auch theilhaftig seyn.

Die jetzige Aufgabe ist völlig derjenigen analog, wo eine Curve bestimmt werden soll, die alle Kreise berührt, welche von einerley Radius auf die verschiedenen Puncte einer gegebenen Curve (Nr. 290) beschrieben sind. Die Zonen welche wir hier so eben haben bemerken lassen, sind in dem cittirten Artikel, durch die kleine Bogen, ersetzt, die auf jedem Kreise zwischen seinen Durchschnitten, mit dem ihm vorhergehenden und dem ihm folgenden enthalten sind; die gesuchte Curve berührt den Kreis nur in einem Punct; die Oberfläche aber, hat auf jeder Kugel eine Berührung im ganzen Umfange eines Kreises. In der That, so lange als die Größe m als beständig betrachtet seyn wird, werden die Differentialcoefficienten p und q denselben Werth für die, durch die Gleichung (1) vorgestellten Kugel, als für die gesuchte Oberfläche haben; aber die Gleichung (2) welche diese Bedingung ausdrückt, kann, als die Gleichung einer Ebene betrachtet werden, die durch den Mittelpunct der Kugel perpendicular auf die der x's und y's, aufgerichtet ist; und ihre Verbindung mit der Gleichung (1) wird den größten

Kreis geben, dessen Umfang alle Berührungspuncte enthält*).

Die Beyspiele der vorhergehenden Artikel, sind derselben Bemerkungen fähig und die Gränz-Oberfläche wird eine jede der Erzeugungs-Oberflächen, längst der, durch das Ensembel der Gleichungen die wir durch (1) und (2) angezeigt haben, ausgedrückten Linie, berühren. Der Kegel und der Cylinder werden ihre Erzeugungsebenen in der ganzen Ausdehuung einer graden Linie, berühren; die Umdrehungs-Oberfläche wird ihre Erzeugungskugeln nach einem Kreis berühren.

338.

Es sey allgemein $V = 0$, eine Gleichung zwischen x, y, z und einer willkührlich beständigen Größe m; indem man von der einen dieser Oberflächen, welche diese Gleichung vorstellt, zu der ihr nachfolgenden, übergeht, so hat man für den beyden gemeinschaftlichen Puncte, $\frac{dV}{dm} = 0$. Das Resultat der Eliminirung von m zwischen diese Gleichung und der vorhergehenden, wird der Oberfläche angehören, die, durch die successiven Durchschnitte, der, in der Gleichung $V = 0$ begriffenen Oberflächen, gebildet ist. Giebt man an m einen besondern Werth, so wird das System der beyden Gleichungen $V = 0$ und $\frac{dV}{dm} = 0$ die Linie ausdrücken, nach welcher die Erzeugungs-Oberfläche, die diesen Werth entspricht, durch die Gränz-Oberfläche berührt ist.

Die-

*) Die Ebene dieses Kreises geht durch die Normale der gegebenen Curve und ist in $G'PH'$ der 53sten Figur der Essais de Géométrie vorstellen.

Dieser letzte Satz kann analytisch bewiesen werden, ohne zu der Betrachtung der successiven Durchschnitte der Erzeugungs-Oberflächen seine Zuflucht zu nehmen; denn, wenn man die Gleichung $V=0$, in Beziehung auf x und auf y differentiirt, indem man m nicht mehr als eine beständige Größe, sondern als eine Function dieser veränderlichen Größen betrachtet, so wird man finden

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dm}\frac{dm}{dx} + \frac{dV}{dz}p = 0$$

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dm}\frac{dm}{dy} + \frac{dV}{dz}q = 0,$$

Gleichungen die, wenn man $\frac{dV}{dm} = 0$ hat, sich zu

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p = 0, \quad \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q = 0$$

reduciren, es folgt daraus, daß diese letzten, durch die, aus der Eliminirung von m zwischen $V=0$, und $\frac{dV}{dm} = 0$ (für alle Werthe von x und y, die unter sich, die, durch die Gleichung $\frac{dV}{dm} = 0$, aufgestellte Relation haben), resultirenden Gleichung befriedigt seyn werden; die, durch der ersten, ausgedrückte Oberfläche wird also diejenigen, welche $V=0$ ausdrückt, auf der ganzen durch das System $V=0$ und $\frac{dV}{dm} = 0$ (Nr. 332), gegebene Linie, berühren.

339.

Die Curven längst welchen sich zwey aufeinanderfolgenden Erzeugungscurven schneiden, sind durch Monge, die Caracteristischencurven der Gränz-Oberfläche, genannt worden, weil sie wirklich der Oberfläche einen Ca-

Caracter eindrücken, der unabhängig von den besondern Bedingungen ist, denen sie unterworfen seyn kann, welches auch die Curve der Mittelpuncte im Beyspiel von Nr. 337 seyn mag, so werden die Caracteristischencurven um nichtsweniger Kreise seyn.

Eine jede der Erzeugungs-Oberflächen enthält zwey Caracteristischencurven die im allgemeinen sich werden schneiden können; ihr Begegnungspunct wird sich zu gleicher Zeit auf 3 aufeinander folgenden Erzeugungs-Oberflächen, befinden, dergestalt, daß ihre Coordinaten beständig bleiben werden, obgleich die Größe m sich zweymahl verändert hat; man wird also zu gleicher Zeit für diesen Punct $V = 0$, $\frac{dV}{dm} = 0$, $\frac{d^2V}{dm^2} = 0$ haben. Wenn man an m einen besondern Werth geben wird, so werden diese Gleichungen die drey Coordinaten des Begegnungspunctes der beyden Caracterischencurven, die sich auf der Erzeugungs-Oberfläche befinden, welche diesen Werth entspricht, bestimmen; eliminirt man aber m, so werden nur zwey Gleichungen bleiben, welche der Curve gehören werden, die durch das Ensembel der Begegnungspuncte der Caracteristischencurven nacheinander je zwey und zwey genommen, gebildet ist Wenn diese Curve eine ihrer kleinen Seiten auf eine jede der Caracteristischencurven hat, so wird sie dieselben alle berühren, und in ihrer Rücksicht, das seyn, was die Gränz-Oberfläche in Beziehung auf den Erzeugungs-Oberflächen ist.

Im Beyspiel von Nr. 337, wird man für die Curve von welcher man so eben gesprochen hat, die drey folgenden Gleichungen haben,

$$[x - m]^2 + [y - \varphi(m)]^2 + z^2 = a^2,$$
$$x - m + [y - \varphi(m)]\varphi'(m) = 0$$
$$-1 - \varphi'(m)^2 + [y - \varphi(m)]\varphi''(m) = 0,$$

indem man $\frac{d\varphi'(m)}{dm} = \varphi''(m)$ macht.

340.

Ein jeder der besondern Fälle der Gränz-Oberflächen, berührt nur die Reihe der Erzeugungs-Oberflächen, die einerley Gestalt der Function φ in der Gleichung $V = 0$ correspondiren; die verschiedene Gestalten die diese Function nehmen kann, geben zu einer Reihe von Gränz-Oberflächen Anlaß, welche manchesmahl durch eine einzige Oberfläche berührt werden können, die, folglich alle besondre Oberflächen, die man von der Gleichung $V = 0$ ableiten würde, berührt, indem man m und der Function φ alle Werthe und alle mögliche Gestalten giebt. Dieses ist die, zwischen m und $\varphi(m)$ aufgestellten Relation, welche das Gesetz, nach welcher die Erzeugungs-Oberflächen eine auf der andern folgen, particularisirt, und weil, um von der einen zu ihrer folgenden überzugehen, man m hat verändern lassen, so ist es einleuchtend, daß, um von die eine der Gränz-Oberflächen zu ihrer nachfolgenden überzugehn, man $\varphi(m)$ unabhängig von m, wird verändern lassen müssen; denn dieses ist das einzige Mittel um auszudrücken, daß die Function φ sich verändert hat. Man wird also, indem man durch n, die Größe $\varphi(m)$ vorstellt, $\frac{dV}{dn} = 0$, für alle Puncte des Durchschnitts der beyden aufeinanderfolgenden Gränz-Oberflächen haben; man muß diese Gleichung zu $V = 0$ und $\frac{dV}{dm} = 0$ hinzufügen

und indem man bemerkt, daß diese letzte, in welcher man $\varphi(m)$ zu gleicher Zeit mit m hat verändern lassen, auch unter der Gestalt

$$\frac{dV}{dm} + \frac{dV}{dn}\frac{dn}{dm} = 0$$

gesetzt werden kann, so sieht man, daß daraus die drey Gleichungen

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dm} = 0, \quad \frac{dV}{dn} = 0$$

entstehen werden, die zur Eliminirung von m und n dienen werden.

Die rein analytischen Betrachtungen, würden zu denselben Resultat geführt haben; wenn man die Gleichung $V = 0$ differentiirt, indem man dann m und n als Functionen von x und von y ansiehet, man findet

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dm}\frac{dm}{dx} + \frac{dV}{dn}\frac{dn}{dx} + \frac{dV}{dz}p = 0,$$

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dm}\frac{dm}{dy} + \frac{dV}{dn}\frac{dn}{dy} + \frac{dV}{dz}p = 0;$$

macht man $\frac{dV}{dm} = 0$, $\frac{dV}{dn} = 0$ und raisonnirt man wie in Nr. 338, so wird man versichert seyn, daß die Oberfläche die, durch der, aus der Elimination von m und n entstehenden Gleichung, zwischen den Gleichungen $V = 0$, $\frac{dV}{dm} = 0$, $\frac{dV}{dn} = 0$, vorgestellt ist, eine jede von denen berühren soll, welche die Gleichung $V = 0$ giebt, wenn m und n unabhängig sind.

Macht man $\varphi(m) = n$ im Beyspiel von Nr. 337, so findet man $\frac{dV}{dm} = x - m$, $\frac{dV}{dn} = y - n$ und folglich $m = x$, $n = y$; substituirt man in der Gleichung

V=0,

$V = 0$, oder $(x - m)^2 + (y - n)^2 + z^2 = a^2$, so kömmt $z = \pm a$.

Diese Gleichung giebt zwey Ebenen, die parallel mit der der x's und y's sind, und die davon um der Größe a, die eine oberwärts und die andre unterwärts entfernt sind. Dieser Schluß konnte leicht vorhergesehen werden, denn es ist sichtbar, daß alle Kugeln die ihren Mittelpunct auf der Ebene der x's und y's haben, und die von demselben Radius sind, von zwey Ebenen die parallel mit dem eben benannten berührt seyn werden.

341.

Es bleibt noch die Function φ zu bestimmen übrig, damit die Gränz-Oberfläche, einige besondere Bedingungen Genüge leiste: wir wollen sogleich voraussetzen, daß alle Erzeugungs-Oberflächen, einerley gegebenen Oberfläche berühren sollen, deren Gleichung durch $F(x, y, z) = 0$ vorgestellt ist, und in welcher die Differential-Coefficienten der Ordinate z durch P und Q angezeigt sind. Beym Berührungspunct dieser letztern, mit einer beliebigen der Erzeugungs-Oberflächen, werden die Gleichungen $V = 0$, $F(x, y, z) = 0$, $P = q$, $Q = q$, zu gleicher Zeit Statt haben; man wird also die Coordinaten x, y und z wegschaffen können, und es wird eine Gleichung zwischen m und $\varphi(m)$, bleiben, welche die Zusammensetzung der Function φ anzeigen wird.

Wir werden noch den Fall betrachten, wo die erzeugte Oberfläche unterworfen wäre, durch eine gegebene Curve zu gehen. Es sey $F(x, y, z) = 0$, $F_{\prime}(x, y, z) = 0$ die Kennzeichen der Gleichungen dieser Curve, es ist evident, daß sie zu gleicher Zeit durch die tangentirenden Ebenen von einer jeden der Oberflächen, welche die obigen

gen Gleichungen vorstellen, berührt werden wird, und daß folglich der Durchschnitt dieser Ebenen ihre Tangente seyn wird (E Nr. 109): wenn sie aber in ihrer ganzen Ausdehnung die Gränz-Oberfläche berührt, so wird sie auch nothwendig eine jede der Erzeugenden berühren, und folglich werden auch ihre Tangenten sich in den tangentirenden Ebenen dieser letzten Oberflächen, befinden. Um diese Bedingungen analytisch auszudrücken, wollen wir P, und Q, die Differentialcoefficienten der ersten Oberfläche nennen, $P_{,}$ und $Q_{,}$ die der zweyten; die Gleichungen ihrer tangentirenden Ebenen werden seyn

$$z - z' = P(x - x') + Q(y - y')$$
$$z - z' = P_{,}(x - x') + Q_{,}(y - y')$$

und die Projectionen der graden Linie die ihr Durchschnitt ist, werden zu Gleichungen

$$x - x' = \frac{(Q_{,} - Q)(z - z')}{PQ_{,} - P_{,}Q}, \quad y - y' = \frac{(P - P_{,})(z - z')}{PQ_{,} - P_{,}Q},$$

haben. Damit diese grade Linie sich in der tangentirenden Ebene der Erzeugungs-Oberfläche befinde, eine Ebene deren Gleichung $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$ ist, so wird, indem man statt $x - x'$ und $y - y'$ die vorhergehenden Werthe setzt, das Resultat identisch seyn müssen; man wird also haben $PQ_{,} - P_{,}Q = P - P_{,} + Q_{,} - Q$: diese, mit den folgenden $V = 0$, $F(x', y', z') = 0$, $F_{,}(x', y', z') = 0$ Gleichungen verbunden, wird durch Elimination der Coordinaten x', y', z' die Relation geben, welche zwischen m und $\varphi(m)$ statt finden muß.

342.

Wir wollen uns jetzt mit den entwicklungsfähigen Oberflächen beschäftigen: diese Oberflächen deren Natur und Eigenschaften in Nr. 96 der Essais de Géométrie durch

geo-

geometrische Betrachtungen vorgetragen sind, können betrachtet werden, als wenn sie durch die aufeinander folgende Durchschnitte einer Reihe von Ebenen die nach einem beliebigen Gesetz geführt sind erzeugt wären. Da die Gleichung einer Ebene drey beständige willkührliche Größen enthält, so muß dieses Gesetz dergestalt beschaffen seyn, daß zwey dieser beständigen Größen, als Function der dritten, bestimmt werden, so daß man einer beliebigen Ebene zufolge nur eine bestimmte Anzahl aufeinanderfolgenden Ebenen finden kann: nimmt man $z = Ax + By + m$, zur Gleichung der vorgegebenen Ebenen, und macht man $A = \varphi(m)$, $B = \psi(m)$, wenn die Caracteristiken φ und ψ zwey beliebige Functionen bezeichnen, so wird die allgemeine Gleichung der entwickelbaren Oberflächen das Resultat der Eliminirung von m zwischen den beyden folgenden seyn:

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m) \;\ldots\; (1)$$
$$-1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m) \;\ldots\; (2).$$

Man kann die willkührlichen Functionen φ und ψ durch die Differentiirung verschwinden lassen; denn indem man zuerst die Gleichung (1) successive in Beziehung auf x und auf y differentiirt, und man m als eine beständige Größe betrachtet, so wird man der Gleichung (2) zufolge finden

$$p = \varphi(m), \qquad q = \psi(m);$$

und weil uns diese Resultate zeigen, daß die Differentialcoefficienten p und q Functionen von derselben Größe sind, so sollen wir daraus schließen, daß p eine Function von q ist, et vice versâ: wir werden also $p = \varpi(q)$ setzen: differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und auf y, und macht man wie in Nr. 331

$$dp = tdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy,$$

so

so wird man finden $r = s\varpi'(q)$, $s = t\varpi'(q)$, und eliminirt man $\varpi'(q)$, so wird kommen

$$rt - s^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist's, die den Caracter der entwickelbaren Oberflächen unabhängig von der Gestalt der Functionen φ und ψ ausdrückt. Wenn wir $rt - s^2$ oder $e = 0$ in den in Nr. 327 gegebenen Ausdrücken des Krümmungshalbmesser machen, so wird die eine von ihnen unendlich; die entwickelbaren Oberflächen haben also eine ihrer Krümmungen gleich Null. Der Radius der andern Krümmung ist bestimmt, indem man den Werth von $z - z'$ in die Gleichung vom ersten Grade nimmt, zu welcher sich die Gleichung (7) reducirt, wenn man $rt - s^2 = 0$ macht.

Die entwickelbaren Oberflächen sind durch die tangentirenden Ebene, in der ganzen Ausdehnung der graden Linien berührt, die ihre Caracteristischencurve ist, und welche das Ensembel der Gleichungen (1) und (2) vorstellt. Das System der drey Gleichungen

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m)$$
$$-1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m)$$
$$0 = x\varphi''(m) + y\psi''(m)$$

wird, wie in (Nr. 339) die Curve ausdrücken die durch die successiven Durchschnitte der Caracteristischencurven ausgedrückt ist, oder die **Kante** der Rückkehrung (E Nr. 97). Wir werden die Gleichungen der entwickelbaren Oberfläche geben, wie eine Sammlung von Tangenten dieser Curve betrachtet, wenn wir von die Curven von doppelter Krümmung reden werden; wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung der willkührlichen Functionen, welche die Gleichungen (1) und (2) enthalten, beschäftigen.

Eine

Eine der einfachsten Bedingungen besteht in der Voraussetzung, daß die gesuchte entwickelbare Oberfläche zu gleicher Zeit zwey gegebene Oberflächen berühren soll. Um diesen Fall abzuhandeln, wollen wir voraussetzen, daß $F(x, y, z) = 0$ und $F_{,}(x, y, z) = 0$ die Symbole der Gleichungen dieser Oberflächen sind, in den Puncten die ihnen mit der gesuchten entwickelbaren Oberfläche gemeinschaftlich sind, die gegebenen Oberflächen müssen beyde zur Tangentirungsebene eine der Erzeugungsebenen haben; wir wollen durch x', y', z', die Coordinaten des Punctes, wo diese Ebene die erste gegebene Oberfläche berührt, und durch x'', y'' und z'' die, des Punctes, wo sie die zweyte berührt, bezeichnen; wir wollen noch über dem festsetzen, daß die Gleichung $F(x',y',z') = 0$, $dz' = Pdx' + Qdy'$ giebt, und daß man aus der Gleichung $F_{,}(x'', y'', z'')$, $dz'' = P_{,}dx'' + Q_{,}dy''$ zieht; weil man durch die Gleichung der Erzeugungsebene, $dz = dx\varphi(m) + dy\psi(m)$ hat, es wird für ihre Berührung mit der ersten gegebenen Oberfläche,

$$z' - m = x'\varphi(m) + y''\psi(m), \quad \varphi(m) = P_{,}, \quad \psi(m) = q,$$

und für ihre Berührung mit der zweyten

$$z'' - m = x''\varphi(m) + y''\psi(m), \quad \varphi(m) = P_{,}, \quad \psi(m) = Q,$$ kommen.

Fügt man die drey ersten Gleichungen zu $F(x', y', z') = 0$, so wird man daraus x', y' und z', wegschaffen, und man wird eine Relation zwischen m, $\varphi(m)$ und $\psi(m)$ haben; die drey letzten combinirt mit $F(x'',y'',z'') = 0$, werden daher auf ähnliche Art, davon eine nach der Eliminirung von x'', y'' und z'', geben, und man wird folglich die Gestalt der Functionen φ und ψ kennen.*)

Wenn

*) Die so eben abgehandelte Frage begreift die Auflösung der allgemeinen Aufgabe von der Theorie der Schatten und der Halb-

Wenn man sich vornähme die gesuchte entwickelbare Oberfläche durch zwey gegebenen Curven gehen zu lassen, sind $F(x', y', z') = 0 \ldots$ und $f(x', y', z') = 0 \ldots (1)$ die Gleichungen der ersten, und

$F_{,}(x'', y'', z'') = 0 \ldots \quad f_{,}(x'', y'', z'') = 0 \ldots (2)$

die Gleichungen der zweyten, so würde man wie in der vorhergehenden Nr. finden, daß die Gleichungen ihrer Tangenten von der Gestalt

$$x - x' = M(z - z'), \quad y - y' = N(z - z'),$$
$$x - x'' = M_{,}(z - z''), \quad y - y'' = N_{,}(z - z'');$$

seyn würden.

Da aber die Erzeugungsebene, diese zwey Curven zugleich berühren muß, so wird sie nothwendig ihre Tangenten enthalten, und da sie durch die Puncte gehen muß deren Coordinaten x', y' und z', x'', y'', und z'', sind, so wird man haben

$$z' - m = x'\phi(m) + y'\psi(m) \ldots (1)$$
$$z'' - m = x''\phi(m) + y''\psi(m) \ldots (2).$$

Zieht man nacheinander diese Gleichungen von $z - m = x\phi(m) + y\psi(m)$, ab, so wird kommen

$$z - z' = (x - x')\phi(m) + (y - y')\psi(m),$$

und $\quad z - z'' = (x - x'')\phi(m) + (y - y'')\psi(m);$

substituirt man für $x - x'$ und $y - y'$, $x - x''$ und $y - y''$, ihre aus die Gleichungen der Tangenten der gegebenen Curven gezogenen Werthe, so werden daraus die beyde Gleichungen

$1 =$

Halbschatten; denn indem man voraussetzt, daß eine der gegebenen Oberflächen leuchtend sey, so wird der Schatten und der Halbschatten der andern Oberfläche zwischen die Nappen der entwickelbaren Oberfläche, begriffen seyn, die zugleich um diesen beyden Oberflächen beschrieben ist. (Siehe Savans Etrangers T. IX).

$$1 = M\varphi(m) + N\psi(m) \ldots (1)$$

$$1 = M_{,}\varphi(m) + N'\psi(m) \ldots (2)$$ entstehən.

Vereinigt man die vier, durch (1) bezeichneten Gleichungen, so wird man nach der Eliminirung der Coordinaten x', y' und z', eine der Relationen finden, welche zwischen m, $\varphi(m)$ und $\psi(m)$ statt haben muß, und die andre wird das Resultat der Eliminirung von x'', y'' und z'', zwischen den vier, durch (2) bezeichneten Gleichungen seyn.

343.

Die allgemeine Gleichung aller Oberflächen, die durch die successiven Durchschnitte einer Reihe von Kugeln gebildet sind, in welchen sich der Radius, mit der Lage des Mittelpuncts zugleich veränderte, würde drey willkührliche Functionen enthalten, denn, wenn die Gleichung einer beliebigen Kugel $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2$ ist; indem man die Größen α, β, γ, von der Größe δ abhängen läßt, so wird man für den Durchschnitt der beyden aufeinander folgenden Kugeln haben

$$[x-\varphi(\delta)]^2 \quad +[y-\psi(\delta)]^2 \quad +[z-\pi(\delta)]^2 \quad =\delta^2$$

$$-[x-\varphi(\delta)]\varphi'(\delta)-[y-\psi(\delta)]\psi'(\delta)-[z-\pi(\delta)]\pi'(\delta)=(\delta).$$

Die Eliminirung der willkührlichen Functionen erfordert zu viel Rechnung um hier einen Platz zu finden; wir wollen nur bemerken, daß man die Differentiationen, successive in Beziehung auf eine jede veränderliche Größe, bis zur dritten Ordnung fortsetzen müßte, indem man δ mit jeder der Coordinaten x, y und z, zugleich sich verändern läßt.

Um die Oberfläche welche wir betrachten zu particularisiren, sind drey Bedingungen erforderlich; man kann sich wirklich vornehmen, die Erzeugungskugel dahin

zu vermögen, daß sie zu gleicher Zeit drey gegebene Oberflächen berühren, oder die Gränz-Oberfläche durch drey gegebene Curven gehen lassen; es wird leicht seyn sowohl auf der einen als der andern dieser Fragen, die Methoden der vorhergehenden Nr. anzuwenden

344.

Man kann zu den allgemeinen Gleichungen der verschiedenen Familien der Oberflächen gelangen, indem man unmittelbar die Betrachtung der Linien, von welchen sie zusammengesetzt sind, anwendet. $V = 0$, $V_{,} = 0$ seyen die Gleichungen einer beliebigen Linie; diese Linie wird ihre Gestalt oder ihre Lage verändern, wenn man die Werthe der willkührlichen beständigen Größen die in ihre Gleichungen hereinkommen, verändern wird: wenn man also eine Relation zwischen mehreren dieser beständigen Größen festsetzt, und man eine von ihnen eliminirt, so wird man zu einem Resultat gelangen, daß das Ensembel einer unendlichen Anzahl Linien, von derselben Art, als die, welche die Gleichungen $V = 0$, und $V_{,} = 0$ (Siehe die Note Seite 192) vorstellen, ausdrücken wird. Einige Beyspiele werden diese Theorie hinlänglich erläutern.

Wenn man zugleich in Betrachtung zieht, daß alle graden Linien die, durch den Punct, dessen Coordinaten α, β und γ sind, zu gehen, unterworfen sind, so werden ihre Gleichungen von der Gestalt $y-\beta=a(x-\alpha)$, $z-\gamma=b(x-\alpha)$ seyn; Laßt uns $b = \varphi(a)$ machen, und statt a und b ihre aus aus den vorhergehenden Gleichungen gezogene Werthe setzen, so wird kommen $\frac{z-\gamma}{x-\alpha} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{y-\alpha}\right)$, eine Gleichung die allen conischen Oberflächen, welche durch die graden

Linien die durch den gegebenen Punct geführt sind, gebildet werden, angehört.

Wir wollen voraussetzen, daß alle grade Erzeugungslinien untereinander parallel seyn müssen; die Größen a und b in den Gleichungen $y=ax+\alpha$ und $z=bx+\beta$ werden dieselben bleiben, welches auch die grade Linie die man insbesondre betrachtet, seyn mag, und nur die Größen α und β werden sich verändern, indem sie von einer graden Linie zu einer andern übergehn; man wird also $\beta=\varphi(\alpha)$ machen, und es wird kommen $y=ax+\alpha$, $z=bx+\varphi(\alpha)$. Die erste dieser Gleichungen giebt $\alpha=y-ax$, und substituirt man in der zweyten, so findet man $z-bx=\varphi(y-ax)$, eine Gleichung die man leicht in die von Nr. 335 eingehen lassen kann.

Wenn die graden Erzeugungslinien alle parallel mit der Ebene der x's und y's sind, und durch die Axe der z's gehen müssen, so werden ihre Gleichungen sich auf $y=ax$ und $z=\beta$, reduciren. Wenn die Größen a und β von einer graden Linie zu einer andern übergehn, so wird man setzen $\beta=\varphi(a)$, und da $a=\frac{y}{x}$ ist, so wird man haben $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, eine Gleichung der Oberfläche die in Nr. 93 der Essais de Géométrie beschrieben ist.

Die Gleichungen $z=\frac{c(x-a)}{y-b}$ und $z=\frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$ mit welchen man sich in Nr. 147 beschäftiget hat, drücken die Ordinaten von zwey Oberflächen dieses Geschlechts aus; denn, wenn, um es mehr zu vereinfachen, man x statt $x-a$ und y statt $y-b$ setzt, welches zur Versetzung des Ursprungs dient, so wird man haben

$$z = \frac{cx}{y} = \frac{c}{\frac{y}{x}}, \quad z = \frac{cxy}{x^2 + y^2} = \frac{c\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Es ist jetzt leicht zu sehen warum die Functionen x unbestimmt werden, wenn man $x = a$ und $y = b$ in ihre ersten Gestalt, oder $x = 0$ und $y = 0$ in ihre zweyten Gestalt macht: die Puncte welche diesen letzten Abscissen entsprechen, befinden sich in der Axe der z's auf welche eine Ordinate von einer jeden der drey graden Erzeugungslinien, deren Anzahl unendlich ist, fällt; wenn man $\frac{y}{x} = m$ macht, so betrachtet man eine dieser graden Linien insbesondere, und man bekömmt nur die Ordinate die ihr angehöret.

Wir haben bis jetzt nur zwey veränderliche Coefficienten in den Gleichungen der graden Erzeugungslinien, vorausgesetzt; es würden deren drey seyn, wenn man eine grade Linie betrachtete, die nur bloß, durch die Axe der z's zu gehen, unterworfen ist, und man die beyden andern Bedingungen, welche ihre Lage particularisiren sollen, als unbekannt, betrachtete.

Wären die Gleichungen einer ähnlichen graden Linie von der Gestalt $y = ax$, und $z = bx + \beta$, so würde man $b = \phi(a)$, $b = \psi(a)$, machen, woraus kommen würde $z = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$. Die willkührlichen Functionen welche diese Gleichung enthält, können bestimmt werden, indem man zwey Curven annimmt durch welche die vorgegebene Oberfläche gehen muß. (E Nr. 194).

Wir wollen jetzt zum allgemeinen Fall übergehen, indem wir, als zu gleicher Zeit veränderlich, die vier Coefficienten

ficienten a, α, b, β die in den Gleichungen der graden Erzeugungslinie hereinkommen, betrachten. Wenn drey dieser Coefficienten als Functionen der vierten, gegeben seyn werden, so wird das Gesetz bestimmt seyn nach welchen man von einer graden Linie zu der auf sie folgenden übergehen wird, wir wollen also festsetzen

$$\alpha = \phi(a), \quad b = \psi(a), \quad \beta = \pi(a)$$

so werden die beyde Gleichungen

$$y = ax + \alpha, \quad z = bx + \beta,$$

werden $\quad y=ax+\phi(a) \ldots (1) \quad z=x\psi(a)+\pi(a) \ldots (2)$

Das System dieser beyden Gleichungen, stellt alle aus graden Linien bestehenden Oberflächen vor, oder die, die durch eine grade Linie, welche sich auf eine beliebige Art bewegt, erzeugt sind; es sind drey Bedingungen erforderlich um diese Oberflächen zu particularisiren; man kann voraussetzen, daß die gesuchte Oberfläche durch drey gegebene Linien gehen muß. (E Nr. 94).

Wenn die grade Erzeugungslinie eine jede dieser Linien schneiden soll, so werden die Gleichungen (1) und (2) zu derselben Zeit, als die, der graden Linie statt haben. Eliminirt man die Coordinaten x, y und z, zwischen den beyden Gleichungen der ersten, und den Gleichungen (1) und (2), so wird man ein Resultat haben, das die Relation ausdrücken wird, welche die Größen a, $\phi(a)$, $\psi(a)$ und $\pi(a)$ haben müssen, damit die grade Erzeugungslinie diese erste Curve schneiden kann; man wird auf eben die Art die Gleichungen (1) und (2) successive mit den der zweyten gegebenen Curve, und mit den der dritten, verbinden, und man wird sich dadurch zwischen den willkührlichen Functionen, und der Größe a, zwey neue Gleichungen verschaffen, die, in Verbindung mit der, von

wel-

welcher wir so eben geredet haben, die Gestalt dieser Functionen bestimmen werden.

Wir werden als Beyspiel den Fall nehmen, wo die drey gegebene Linien, grade sind, und wir werden ihre Gleichungen durch

$$\left.\begin{array}{l} y=a'x+\alpha' \\ z=b'x+\beta' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=a''x+\alpha'' \\ z=b''x+\beta'' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=a'''x+\alpha''' \\ z=b'''x+\beta''' \end{array}\right\} \text{vorstellen;}$$

combinirt man successive die Gleichungen (1) und (2) mit einer jeden der vorhergehenden, und setzt man wieder zur Verkürzung α, b und β, statt der Functionen $\varphi(a)$, $\psi(a)$, und $\pi(a)$, so wird man die drey Gleichungen

$$(a-a')(\beta-\beta')-(\alpha-\alpha')(b-b')=0$$
$$(a-a'')(\beta-\beta'')-(\alpha-\alpha'')(b-b'')=0$$
$$(a-a''')(\beta-\beta''')-(\alpha-\alpha''')(b-b''')=0,$$

haben, welche die Werthe von α, b und β in a geben werden; substituirt man diese Werthe in (1) und (2) und eliminirt man a, so wird man zur Gleichung der gesuchten Oberfläche, gelangen. Wir werden uns nicht in die Details dieser Rechnungen einlassen, die man vereinfachen kann, indem man eine der gegebenen graden Linie mit die Axe der z's sich decken läßt; wir wollen nur dem Leser der sie etwa verrichten wollte, anzeigen, daß das Resultat einer Oberfläche der zweyten Ordnung angehört.

Es ist leicht diese Betrachtungen bis zu einem beliebigen Geschlechte von Linien auszudehnen, und um die Gleichung der Oberfläche, die durch das Ensembel dieser Linien gebildet ist, zu bekommen, so wird es hinreichend seyn alle willkührliche beständige Größen, die ihre allgemeine Gleichungen enthalten, von einer einzigen abhängen zu lassen.

Ein Kreis kann auf eine bequeme Art im Raum vermittelst einer Kugel und einer Ebene, gegeben werden; die

die Gleichung der ersten ist allgemein

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \delta^2 \ldots (1),$$

die, von einer Ebene, welche durch ihren Mittelpunct gin-ge, würde von der Gestalt

$$(z - \gamma) = a(x - \alpha) + b(y - \beta) \ldots (2) \text{ seyn.}$$

Die Lage und die Größe des Kreises, welcher der Durchschnitt dieser beyden Oberflächen ist, wird, wie man sieht, von sechs beständigen willkührlichen Größen abhangen; man wird voraussetzen, daß fünf von ihnen Functionen von der übrigbleibenden sind, und das System der Gleichungen (1) und (2) zwischen welche man diese letzte beständige Größe eliminiren wird, gehört den Oberflächen, welche von Kreisen gebildet sind, die nach einem beliebigen Gesetz aufeinander folgen, und in welchen die ringförmigen Oberflächen begriffen sind. Man wird sie dergestalt particularisiren können, daß sie durch fünf gegebene Linien gehen, weil ihre allgemeine Gleichung eine ähnliche Anzahl willkührlicher Functionen enthält.

345.

La Grange hat die Mittel angezeigt die Oberflächen zu finden, die durch Linien von einer gegebenen Natur zusammengesetzt sind; aber dieser große Geometer hat die Frage nicht in dem ganzen Umfange dessen sie fähig ist, betrachtet, er hat vorausgesetzt, daß, wenn die Erzeugungslinien auf einerley Oberfläche wären, sie sich aufeinanderfolgend je zwey und zwey schneiden müßten, eine unnöthige Bedingung. Die in den Künsten unter den Nahmen irreguläre Oberflächen (surfaces gauches) bekannten Oberflächen (E Nr. 94), bestehen aus graden Linien die diese Bedingungen nicht befrieden und sie findet nur für

die entwickelbaren Oberflächen statt: die Art und Weise wie man sie ausdrücken kann, ist folgende.

Man läßt in den Gleichungen (1) und (2) Seite 357 die Größe a sich verändern, indem man x, y, z, als beständige Größen betrachtet, und es kommen die vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + \varphi(a) \\ o = x + \varphi'(a) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z = x\psi(a) + \pi(a) \\ o = x\psi'(a) + \pi'(a) \end{array}\right\}$$

die zu gleicher Zeit für den Begegnungspunct der beyden graden aufeinander folgenden Erzeugungslinien statt haben sollen. Vertreibt man x aus den beyden Gleichungen die sich auf der zweyten Linie befinden, so kommt daraus die Gleichung $\varphi'(a)\,\psi'(a) - \pi'(a) = o \ldots (3)$, welche eine Relation aufstellt die zwischen den Functionen φ, ψ und π nothwendig ist; sie hören also alle auf willkührlich seyn, und folglich verlieren die Gleichungen (1) und (2) von ihrer Allgemeinheit.

Die entwickelbaren Oberflächen, so betrachtet, als wenn sie von je zwey und zwey sich schneidenden graden Linien gebildet wären, sind also durch die drey Gleichungen

$$y = ax + \varphi(a), \qquad z = x\psi(a) + \pi(a), \qquad \varphi'(a)\,\psi'(a) - \pi'(a) = o$$

vorgestellt, zwischen welchen man die Größe a und eine der willkührlichen Functionen eliminiren muß.

Um die Identität dieses Resultats, mit dem aus Nr. 342 zu zeigen, wollen wir wieder die Gleichungen

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m), \qquad -1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m)$$

vornehmen, und indem wir y aus der ersten wegschaffen, werden wir haben

$$z = x\left(\varphi - \frac{\varphi'}{\psi'}\psi\right) + m - \frac{\psi}{\psi'}, \qquad y = -x\,\frac{\varphi'}{\psi'} - \frac{1}{\psi'},$$

indem man zur Verkürzung φ statt $\varphi(m)$ u. s. w. schreibt. Wenn diese Gleichungen Glied für Glied mit $z = bx + \beta$

und

und $y = ax + \alpha$, verglichen sind, so wird kommen

$$b = \varphi - \frac{\varphi'}{\psi'}\psi,\quad \beta = m - \frac{\psi}{\psi'},\quad a = -\frac{\varphi'}{\psi'},\quad \alpha = -\frac{1}{\psi'},$$

woraus man sogleich schließen wird, daß a, α, b und β, Functionen einer und eben derselben Größe m seyn müssen. Setzt man in den Ausdrücken von b und β statt $\frac{\varphi'}{\psi'}$ und ψ' ihre Werthe, so wird man finden $b = \varphi + a\psi$, $b = m + \alpha\psi$; man wird also um a, α, b und β, zu bestimmen, die vier Gleichungen $b = \varphi + a\psi$, $\beta = m + \alpha\psi$, $a\psi' + \varphi' = 0$, $\alpha\psi' + 1 = 0$ haben, eliminirt man aus denselben φ, ψ und m, so kömmt daraus die Relation welche zwischen die Größen a, α, b und β, statt haben soll. Wir wollen die Differentiale von b und β nehmen, und wir werden finden

$$db = \varphi' dm + a\psi' dm + \psi da = (\varphi' + a\psi')\,dm + \psi da$$
$$d\beta = dm + \alpha\psi' dm + \psi d\alpha = (1 + \alpha\psi')\,dm + \psi da$$

ein Ausdruck welcher, Kraft der Gleichungen $a\psi' + \varphi' = 0$ und $\alpha\psi' + 1 = 0$, bis auf $db = \psi da$ und $d\beta = \psi d\alpha$ sich reduciret; eliminirt man ψ, so wird man bekommen

$$db\,d\alpha - da\,d\beta = 0.$$

Diese letzte Gleichung kömmt mit der Gleichung (3) überein; denn es ist leicht zu sehen, daß wenn die Größen a, b und β Functionen einer und eben derselben Größe seyn sollen, daraus folgt, daß drey unter ihnen Functionen der vierten sind.

Ich kann dieses Sujet nicht verlassen ohne bemerkbar zu machen, daß die Sammlung aller Normalen, die zu einer krummen Oberfläche geführt sind, längst einer dieser Linien der Krümmung, eine entwickelbare Oberfläche bildet, deren Kante der Rückkehr sich auf der Oberfläche befindet, welche der Ort aller Mittelpuncte von der größten und kleinsten Krümmung ist.

Allgemein, wenn $V=0$ und $V_{,}=0$ die Gleichungen der Erzeugungslinien sind, und die willkührlichen Größen α, β, γ, δ, enthalten, so werden, damit diese Linien sich schneiden, die Gleichungen

$$\frac{dV}{d\alpha}d\alpha+\frac{dV}{d\beta}d\beta+\frac{dV}{d\gamma}d\gamma+\frac{dV}{d\delta}d\delta+\text{etc.}=0$$

$$\frac{dV_{,}}{d\alpha}d\alpha+\frac{dV_{,}}{d\beta}d\beta+\frac{dV_{,}}{d\gamma}d\gamma+\frac{dV_{,}}{d\delta}d\delta+\text{etc.}=0$$

zu derselben Zeit als die Gleichungen $V=0$ und $V_{,}=0$ statt haben müssen; eliminirt man x, y und z, zwischen diesen zwey letzten und den beyden ersten, so wird man eine Relation zwischen allen willkührlichen Größen haben, und wenn man folglich $\beta=\varphi(\alpha)$, $\gamma=\psi(a)$, $\delta=\chi(\alpha)$, u.s.w. macht, so wird darin eine dieser Functionen seyn, die vermittelst der andern bestimmt seyn wird. Die Eliminirung der willkührlichen Functionen in den allgemeinen Gleichungen, zu welchen wir in den vorhergehenden Artikeln gelangt sind, würde ziemlich mühsam zu verrichten seyn, und da es nöthig seyn wird auf diese Operation in dem Integralcalcul zurückzukommen, so wollen wir jenem Theile die Details überlassen die hier keinen Platz finden würden; wir werden alsdann zeigen wie man zu den Differential-Gleichungen gelangen kann, die, in Beziehung auf den Caracteristischencurven einer Oberfläche, und auf den Curven welche diese Caracteristischencurven durch ihre successiven Durchschnitte hervorbringen, statt haben, und wir werden die interessanten Beziehungen, welche diese Gleichungen mit der, der vorgegebenen Oberfläche verbinden, entwickeln.

346.

Anwendung des Differentialcalculs auf den Curven von doppelter Krümmung.

Es seyen x, y und z die Coordinaten einer beliebigen Curve XM (Fig. 49) die aus dem Durchschnitt zweyer Oberflächen deren Gleichungen wir durch $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$ vorstellen werden, entstanden ist. Eliminirt man wechselsweise aus diesen Gleichungen eine jede der veränderlichen Größen z, y und x, so wird man drey neue Gleichungen erhalten, die erste zwischen y und x, die andre zwischen z und x, und die dritte zwischen z und y, welche respective den Projectionen X′M′, X″M″, X‴M‴ der vorgegebenen Curve auf jeder der coordinirten Ebenen, gehören werden. Sie werden auch die cylindrischen Oberflächen ausdrücken, die, auf diese Projectionen, perpendicular auf den coordinirten Ebenen die sie enthalten, errichtet sind; und die vorgegebene Curve XM wird der Durchschnitt von irgend zwey dieser drey Oberflächen seyn (E Nr. 81).

Man wird leicht die Gleichungen der Tangente MT haben, indem man bemerkt, daß ihre Projectionen selbst Tangenten zu denen der Curve XM sind (E Seite 102); da es hinreichend ist zwey Projectionen dieser graden Linien zu kennen, so wollen wir die wählen, die sich auf der Ebene der x's und y's befindet, und die welche die Ebene der y's und z's enthält. Bezeichnet man also durch x′, y′ und z′, die Coordinaten des Punctes M, so wird die Gleichung der graden Linie T′M′, Tangente an der Projection X′M′, $y - y' = \frac{dy'}{dy'}(x - x')$ seyn, und die von T″M″, Tangente an X″M″, wird $z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x')$ seyn.

seyn. Wir wollen annehmen, daß man aus den Gleichungen der Curven $X'M'$ und $X''M''$, $y'=\varphi(x')$, $z'=\psi(x')$, gezogen hätte, so werden die Gleichungen der Tangente TM werden

$$y - \varphi(x') = (x - x')\varphi'(x') \ldots (1)$$
$$z - \psi(x') = (x - x')\psi'(x') \ldots (2).$$

Wenn man x' zwischen diesen Gleichungen eliminirt, so wird man die Relation haben, welche sich zwischen den Coordinaten x, y und z der Tangente TM, befinden muß, welches auch die Lage des Puncts M, (siehe die Note S. 192) und folglich auch die Gleichung der Oberfläche seyn mag, die durch alle Tangenten der Curve XM gebildet ist. Man wird daraus erkennen ob diese Curve eben, oder von doppelter Krümmung ist; im ersten Fall wird die in Rede stehende Oberfläche, eine Ebene seyn; im zweyten Fall wird sie nur eine entwickelbare Oberfläche seyn (E Nr. 96) deren vorgegebene Curve die Kante der Wiederkehrung seyn wird. Das System der Gleichungen (1) und (2) zeigt also noch die allgemeine Gleichung der entwickelbaren Oberflächen unter einer andern Gestalt.

347.

Die Resultate zu welchen wir in der vorhergehenden Nummer gekommen sind, hätte man auf eben die Art erhalten können, als wir zu den Gleichungen der Osculirungslinien, auf einer Ebene betrachtet, gekommen sind. Wenn man zwey Gleichungen zwischen drey veränderlichen Größen x', y', z', hat, so giebt es immer zwey dieser veränderlichen, die Functionen von der dritten sind; wenn man also voraussetzt, daß x' die unabhängig veränderliche ist, und daß sie $x' + h$ wird, so werden die beyde andern sich in

$y' +$

$$y' + \frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots z' + \frac{dz'}{dx'}\frac{h}{1} + \frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

verwandeln, bezeichnet man durch x, y und z die Coordinaten der Osculirungslinie, so wird man auch, wenn sich x in x + h verwandeln wird, haben

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots \quad z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

vergleicht man diese Reihen mit den vorhergehenden, so wird man daraus die Osculations-Bedingungen, wie für die, auf einer Ebene gegebenen Curven ableiten. Man muß für eine Berührung der ersten Ordnung indem man x = x' macht,

$$y = y', \quad z = z', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dx'} \text{ haben.}$$

Wenn eine grade Linie durch die Gleichungen $y = ax + \alpha$, $z = bx + \beta$ gegeben ist, so findet man ohne Mühe, daß $a = \frac{dy'}{dx'}$, $b = \frac{dz'}{dx'}$ ist; und da sie durch die Puncte gehen muß deren Coordinaten x', y' und z' sind, so wird man wie in der vorhergehenden Nr.

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'), \quad z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') \text{ haben.}$$

Man wird leicht diese Betrachtungen, bis zu den Berührungen von noch höhern Ordnungen ausdehnen.

348.

Eine Linie im Raume betrachtet, kann durch eine Oberfläche berührt werden, und mit ihr, mehr oder wenige vollkommene Berührungen haben. Wir wollen durch x, y und z die Coordinaten der berührenden Oberfläche bezeichnen, und voraussetzen, daß x, x+h wird und daß y sich in y+k verwandelt, die Entwickelung von z wird die Gestalt

z +

$$z + \frac{dz}{dx} h + \frac{dz}{dy} k$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{d^2z}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2z}{dx\,dy} h + \frac{d^2z}{dy^2} k^2 \right\}$$

$+$ u. s. w.

annehmen. Wenn man aber, um die Berührungs-Bedingungen zu finden, diese Reihe mit der analogen Reihe, die von den Gleichungen der vorgegebenen Curve abgeleitet ist, vergleichen will, so muß man nicht nur $x = x'$, $y = y'$ und $z = z'$ in einem jeden der Differentialcoefficienten der Oberfläche machen; sondern auch noch statt k, die Reihe $\frac{dy'}{dx'} \frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \ldots$ setzen, weil der Anwachs k, durch die Natur der Curve dem Anwachs h subordinirt ist; aus diesen Substitutionen erhält man eine Reihe, welche ich durch $z' + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \ldots$ vorstellen werde, worinnen $P, Q, R, \ldots$ gegebene Functionen von den Differentialcoefficienten seyn werden, und aus die Gleichung der Oberfläche und derjenigen, welche die eine der Gleichungen der vorgegebenen Curve giebt, gezogen sind. Man wird also für eine Berührung der ersten Ordnung $\frac{dz'}{dx'} = P$, für eine Berührung der zweyten Ordnung $\frac{dz'}{dx'} = P$ und $\frac{d^2z'}{dx'^2} = Q \ldots\ldots$ haben.

Wir wollen z. B. die Ebene nehmen, deren Gleichung $z = Ax + By + D$ ist; man wird sogleich haben $z = Ax' + By' + D$, verwandelt man nachher x' in $x' + h$ und y' in $y' + k$, so wird $z' + Ah + Bk$, statt z kommen; setzt man $\frac{dy'}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \ldots$ an der Stelle von k, so wird daraus kommen

$z' +$

$$z' + Ah + B\frac{dy'}{dx'}h + B\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Wenn die Gleichung der Ebene drey beständige Größen enthält, so wird man durch ihre Vermittelung, die Bedingungen der Berührung der zweyten Ordnung erfüllen können, welche geben werden

$$\frac{dz'}{dx'} = A + B\frac{dy'}{dx'},\quad \frac{d^2z'}{dx'^2} = B\frac{d^2y'}{dx'^2};$$

zieht man aus diesen Gleichungen die Werthe von A und B, und setzt man an der Stelle von

$$\frac{dy'}{dx'},\ \frac{d^2y'}{dx'^2},\ \frac{dz'}{dx'},\ \frac{d^2z'}{dx'^2}$$

die Ausdrücke $\varphi'(x')$, $\varphi''(x')$, $\psi'(x')$, $\psi''(x')$, so wird kommen

$$A = \frac{\psi'(x')\varphi''(x') - \varphi'(x')\psi''(x')}{\varphi''(x')},\quad B = \frac{\psi''(x')}{\varphi''(x')}.$$

Bestimmt man nachher D, damit die gesuchte Ebene durch den Punct M gehet, so wird man haben $z - z' = A(x - x') + B(y - y')$; substituirt man für z', y' A und B, ihre Ausdrücke so wird daraus kommen

$$\varphi''(x')[z - \psi(x')] = [\psi'(x')\varphi''(x') - \varphi'(x')\psi''(x')](x - x') + \psi''(x')[y - \varphi(x')].$$

Dieses ist die Gleichung der Osculirungsebene einer beliebigen Linie; wenn diese Linie eben wäre, so würde die Osculirungsebene dieselbe seyn als die, welche die Linie ganz enthält.

Wir wollen diese Theorie nicht noch länger verfolgen, welche denjenigen keine Schwierigkeit mehr machen wird, die mit Aufmerksamkeit ihrer Anwendung bey den, auf einer Ebene und auf Oberflächen, gegebenen Linien gefolgt haben; und da das, was wir über die Curven mit doppelter Krümmung nach Monge zu sagen haben, von

sehr

sehr eleganten geometrischen Betrachtungen abhängt, so wollen wir uns seiner Lehrart nähern.

349.

Die Curven von doppelter Krümmung können als Polygone betrachtet werden, von welchen drey aufeinanderfolgende Seiten sich nicht in derselben Ebene befinden können; die Verlängerung einer dieser Seiten giebt die Tangente für diese, so wie auch für die ebenen Curven; zwey aufeinander folgende Tangenten TM und tm bestimmen die Ebene die durch zwey aufeinander folgende Tangenten geht, und die nicht anders als die Osculirungsebene ist.

Man kann ihre Gleichung finden, indem man sie betrachtet, als ob sie durch drey aufeinanderfolgende Puncte der vorgegebenen Curve ginge: es sey also $Ax + By + Cz + D = o$ ihre Gleichung; man muß sogleich haben $Ax' + By' + Cz' + D = o$, weil er den Punct enthalten soll, dessen Coordinaten x', y' und z' sind; und damit die beyden folgenden Puncte sich auch darinn befinden, so muß überdieß das erste und zweyte Differential von ihrer Gleichung zu derselben Zeit als die, der Gleichungen der vorgegebenen Curve statt haben.

Man könnte eins der Differentiale dx', dy' oder dz' als beständig annehmen; es wird aber symmetrischer seyn, sie alle als zugleich veränderlich zu behandeln, und es wird kommen

$$Adx' + Bdy' + Cdz' = o; \qquad Ad^2x' + Bd^2y' + Cd^2z' = o,$$

woraus man ziehen wird

$$\frac{A}{C} = \frac{dy'd^2z' - dz'd^2y'}{dx'd^2x' - dy'd^2x'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{dz'd^2x' - dx'd^2z'}{dx'd^2y' - dy'd^2x'};$$

zieht man die Gleichung $Ax' + By' + Cz' + D = o$ von $Ax + By + Cz + D = o$ ab, und setzt nachher statt

$\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ ihre Werthe und läßt die Nenner verschwinden, so werden wir das Folgende, durch seine Gestalt merkwürdige Resultat, bekommen.

$$(x-x')(dy'd^2z'-dz'd^2y)+(y-y')(dz'd^2x'-dx'd^2z')+(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')=0.$$

Setzt man in diese Gleichung statt y', z', und ihre Differentiale, die Werthe, welche, indem man alles verändern läßt, die Gleichungen $y=\varphi(x')$, $z'=\psi(x')$ geben, so werden die Differentiale verschwinden, und man wird dasselbe Resultat als in der vorhergehenden Nr. finden.

Ich werde diesen Artikel mit der Bemerkung endigen, daß das Differential des Bogens einer Curve, im Raume betrachtet, zum Ausdruck $\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$ hat. Dieses sieht man deutlich indem man die Entfernung der Puncte M und m nimmt, deren respective Coordinaten x', y', z', $x'+dx'$, $y'+dy'$ und $z'+dz'$ sind.

350.

Eine Normale an einer Curve im Raum betrachtet, zu führen, ist eine unbestimmte Aufgabe; denn es existirt eine unendliche Anzahl grader Linien die durch den Berührungspunct gehen, und zu gleicher Zeit perpendicular auf der Tangente sind; das Ensembel dieser graden Linien bildet eine auf dieser Tangente senkrechte Ebene, und welche wir Normalebene nennen wollen, ihre Gleichung wird seyn

$$(x-x')\frac{dx'}{dz'}+(y-y')\frac{dy'}{dz'}+(z-z')=0 \text{ (Nr. 301), oder}$$

$$(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0.$$

Wenn man statt y', z', dy' und dz' ihre, durch $\varphi(x')$, $\psi(x')$, $\varphi'(x')$ und $\psi'(x')$, vorgestellte Werthe setzt, so wird kommen

$$[x-x']+[y-\varphi(x')]\varphi'(x')+[z-\psi(x')]\psi'(x')=0 \ldots (a)$$

Wir wollen jetzt die Normalebene für den nächstfolgenden Punct betrachten; es ist evident, daß sie die, welche wir so eben bestimmt haben schneiden wird, in einer graden Linie deren Coordinaten sich nicht verändert haben werden, obgleich x', $x'+dx'$ geworden; man wird also für diesen Durchschnitt die Gleichung aben

$$[y-\varphi(x')]\varphi''(x')+[z-\psi(x')]\psi''(x')-\varphi'(x')^2-\psi'(x')^2-1$$
$$=0 \ldots (b).$$

Eliminirt man x' zwischen diese Gleichung und der vorhergehenden, so wird man die, der entwickelbaren Oberfläche haben, die durch die successiven Durchschnitte der Normalebenen der vorgegebenen Curve gebildet ist. Man wird einen Begrif dieser Oberfläche haben, wenn man mit Aufmerksamkeit die Fig. 51 betrachtet. Man hat der Curve ein Polygon $MM'M''M'''$ substituirt; durch die Mitte G, G', G'', G'''... einer jeden Seite dieses Polygons hat man auf ihr perpendiculare Ebenen $GLKH$, $G'L'K'H'$, $G''L''K''H''$, $G'''L'''K'''H'''$... geführt: diese Ebenen schneiden sich je zwey und zwey nach den graden Linien KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$ . . . welche nur alsdann unter sich parallel seyn werden, wenn die Seiten des Polygons M $M'M''M'''$... in einer Ebene seyn, und alsdann ein Prisma bilden werden.

Wenn man annimmt, daß die graden Linien KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$... verlängert sind, bis daß jede von ihnen ihre nächst folgende begegnet, so werden sie ein Polygon bestimmen, daß die Kante der Rückkehrung der entwickelbaren Oberfläche vorstellen wird, die durch die Normalebenen (E Nr. 96) gebildet ist. Dieses Polygon enthält die Mittelpuncte der Kugeln die durch vier aufeinander folgende Winkeln des Polygons $MM'M''M'''$..

gehen;

gehen; denn der Durchschnitt zweyer graden Linien wie KH und K'H', ist auch der Durchschnitt der drey Ebenen GLKH, G'L'K'H', G''L''K''H'', die perpendicular auf der Mitte der graden Linien MM', M'M'', M''M''', geführt sind, und die vier Puncte M, M', M'', M''' verbinden (E Nr. 68).

Wenn alle Winkel des vorgegebenen Polygons sich auf derselben Kugel befänden, so würden alle graden Linien KH, K'H', K''H'', K'''H''',... sich im Mittelpunct dieser Kugel schneiden, und wären folglich die Kanten einer Pyramide.

Diese Eigenschaften werden nicht aufhören statt zu finden, welches auch die Anzahl der Seiten des Polygons MM'M''M'''... seyn mag, und folglich sich mit der vorgegebenen Curve selbst decken; es folgt also daraus, daß, wenn sie eben ist, alle ihre Normalebenen, durch ihre aufeinanderfolgende Durchschnitte eine cylindrische Oberfläche bilden werden, und wenn sie von doppelter Krümmung und sie doch ein Theil von einer Kugel ist, so wird alsdann die Oberfläche ihrer Normalebenen conisch seyn, und ihren Scheitel im Mittelpuncte der Kugel haben. In dem Falle wo die vorgegebene Curve eben wäre, und sich zu gleicher Zeit auf einer Kugel befinden würde, würde sie nothwendig ein Kreis seyn, und alle Ebenen die auf ihr perpendicular seyn würden, würden sich in einerley graden Linie schneiden die durch ihren Mittelpunct perpendicular auf der Ebene die sie enthält, errichtet ist.

Um zu der Gleichung der Kante der Rückkehrung der Oberfläche zu gelangen, die durch die successiven Durchschnitte der Normalebenen gebildet ist, muß man zu den Gleichungen (a) und (b) die Differentialle dieser letzten hinzufügen, die, bloß in Beziehung auf x' (Nr. 339) genommen ist, und man wird haben

$$[y-\varphi(x')]\varphi'''(x')+[z-\psi(x')]\psi'''(x')-3\varphi'(x')\varphi''(x')-$$
$$3\psi'(x')\psi''(x')=0 \ldots (c).$$

Wenn man in diesen drey Gleichungen den Werth von $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, nähme, um ihn in

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

zu setzen, so würde man den Kugelhalbmesser haben der durch die vier aufeinanderfolgende Puncte M, M', M'', M''', gehet, und deren Mittelpunct sich bey dem Durchschnitt der drey ersten Normalebenen befindet.

351.

Es sey XM Fig. 50 eine beliebige Ebene Curve, von welcher FZ die Entwickelte vorstellt; wenn man durch alle Puncte dieser entwickelten, grade Linien FG, F'G', F''G'', F'''G'''... perpendicular auf ihrer Ebene, errichtet, so werden sie auf der cylindrischen Oberfläche seyn, die aus den successiven Durchschnitten der Normalebenen der vorgegebenen Curve, entstanden sind, denn die durch die Normalen MF, M'F', M''F'', M'''F'''... und durch die graden Linien, von welchen wir so eben geredet haben, geführte Ebenen sind perpendicular auf der Curve XM. Ist Ist dieses festgesetzt, so ist es evident, daß jeder Punct der graden Linie GF, gleich weit von allen denen Puncten des kleinen Kreisbogens, der aus den Punct F, als Mittelpunct, mit einem Radius MF beschrieben ist, entfernt seyn wird: auf eben der Art auch wird ein jeder Punct der graden Linie F'G' (die nächst auf der vorhergehende folgende) gleich weit entfernt von allen Puncten des Bogens seyn, der aus den Punct F als Mittelpunct mit einen Radius MF beschrieben ist, u. s. w. Man könnte also den beliebigen Punct G, auf der graden Linie F, genommen, als ein Mittelpunct des Bogens MM' ansehen,

und

und daraus schließen, daß denselben Punct der Curve XM, eine unendliche Anzahl Krümmungshalbmesser, so wie GM, deren kürzster MF seyn wird, der sich in derselben Ebene als die vorgegebene Curve befindet, entsprechen.*) Die cylindrische Oberfläche FF′F″F‴... G‴G″G′G wird, ausser der Curve FF′F″F‴ eine unendliche Anzahl andere Curven enthalten, die durch ihre Entwickelung, die vorgegebene XM hervorbringen werden. In Wahrheit, wenn man den Cylinder ein Prisma von einer großen Anzahl Seitenflächen substituirt, und man willkührlich einen Punct G auf eine der Kanten dieses Prisma, nimmt, und den correspondirenden Radius GM verlängert, bis daß er die folgende Kante F′G′ begegnet, so wird man einen neuen, mit dem ersten consecutiven Radius G′M′ haben; indem man diesen Radius bis zur Begegnung der Kante F″G″ u. s. w. verlängert, wird man ein Polygon GG′G″G‴... durch die Entwickelung von welcher die Bogen M′M′, M″M″, M‴M‴, als Kreisbogen betrachtet, beschrieben seyn werden, bilden; weil der Radius G′M mit seinem Nächstfolgenden G′M′ zusammenfallen wird, wenn der Punct M den Bogen MM′ durchlaufen hat. Es ist leicht zu sehen, daß dasselbe Statt finden würde, wenn man die Ebene FF′G′G und G′F′ drehen läßt, um sie in der Verlängerung der folgenden Sei-

 tenfläche

*) Um zu begreifen, daß die obigen Benennungen auf sehr guten Gründen beruhen, so ist es hinreichend zu bemerken, daß alle Puncte der graden Linie, die durch den Mittelpunct eines Kreises senkrecht auf ihrer Ebene aufgerichtet ist, zur Beschreibung dieses Kreises dienen können, gleich wie der Mittelpunct selbst, weil sie von allen Puncten des Umkreises gleich weit entfernt sind.

tenfläche $F'F''G'G''$ zu führen: woraus folgt; daß wenn man das Prisma $FF'F''F'''\ldots G'''G''G'G$ entwickelt, das Polygon $GG'G''G'''\ldots$ eine grade Linie werden wird. Aus dem Gesagten begreift man, daß ein Faden der zuerst in der Richtung GM gespannt ist, und nachher frey um das in Rede stehende Prisma gewickelt wird, den Umfang des Polygons $GG'G''G'''\ldots$ (E Seite 96) folgen würde.

Man sieht also, daß eine ebene Curve ausser der Entwickelten $FF'F''F'''\ldots$ die mit ihr in derselben Ebene liegt, eine unendliche Anzahl andrer Entwickelten, die von doppelter Krümmung sind, hat, und daß alle grade Linien werden, wenn man den sie enthaltenden Cylinder entwickelt.

Es ist hier der Ort zu bemerken, daß die Tangenten dieser Entwickelten alle denselben Winkel, mit die, des Cylinders bilden die sie begegnen, und sind folglich in Rücksicht der Ebene, welche die vorgegebene Curve enthält, gleich geneigt.

352.

Wir wollen jetzt auf den Curven von doppelter Krümmung die Theorie, welche wir eben, in Rücksicht auf den ebenen Curven gezeigt haben, anwenden. Es ist evident, daß die grade Linie KH (Fig. 51) auf der Ebene, welche die beyde aufeinanderfolgende Seiten MM' und M'M'' enthält, perpendiculär seyn wird, weil sie der Durchschnitt zweyer Ebenen ist, die auf ihr respective perpendicular sind; und wenn man sich die erste verlängert gedenkt, bis daß sie KH in O begegnet, so wird der Punct O der Mittelpunct des Kreises seyn der durch die drey Puncte M, M' und M'' gehen würde. Es folgt daraus, daß ein jeder Punct der graden Linie KH, gleich weit von diesen Puncten entfernt seyn wird, es wird das-

selbe

selbe seyn mit den Puncten von K'H', in Beziehung auf den Puncten M', M'', M''', mit den Puncten von K''H'', in Rücksicht der Puncte M''M'''M''''... Wenn man also eine grade Linie GF in der ersten Normalebene GLKH führt, und man durch den Punct wo sie KH begegnet, und durch den Punct G', die grade Linie G'F in der zweyten Normalebene GL'K'H' führt, so werden die beyde grade Linien GF und G'F in Rücksicht auf KH gleiche Neigung haben; verlängert man nachher G'F bis zur Begegnung von K'H', und führt man G''F' in der dritten Normalebene, so werden die beyden graden Linien G'F' und G''F' in Beziehung auf K'H' gleiche Neigung haben. Verfolgt man diese Construction, so wird man ein Polygon FF'F''F''' bilden, auf dessen Umfang sich ein gespannter Faden anschmiegen würde, zuerst in der Richtung GH, und nachher frey auf der Oberfläche HH'H''H'''... K''' K''K'K gebogen, die durch die successiven Durchschnitte der Normalebenen gebildet ist. Seine Entwickelung würde die Kreisbogen hervorbringen, welche durch die, je drey und drey verbundenen Puncte M', M', M'', M'''... gehen. Die Betrachtung dieses Polygons zeigt recht deutlich die Existenz und die Bildung aller Entwickelten einer beliebigen Curve von doppelter Krümmung *).

Der

*) Wenn man sich eine beliebige Linie denkt, die sich in der Ebene GLKH befindet, so wird diese Linie einen Theil des graden Kegels um KH beschreiben, während die Ebene die sie enthält sich drehen wird, um sich an ihrer consecutiven G'L'K'H' anzuschließen; wenn diese letzte sich selbst um K'H' drehen wird, um sich an ihrer Consecutiven anzuschließen, so wird die grade Linie, welche wir betrachten, einen zweyten Theil des Kegels um K'H' beschreiben u. s. w.; die Sammlung aller dieser Theile des Kegels wird eine entwickelbare Oberfläche bilden

die

Der kleinste Weg von allen Krümmungshalbmesser, wird im gegenwärtigem Falle, wie für die ebenen Curven der seyn, welcher sich in die Ebene der beyden consecutiven Seiten die man betrachtet, selbst befindet; aber alle Radii dieser Art, die man absolute Krümmungshalbmesser nennen kann, werden nicht einerley Curve tangentiren, denn sie begegnen sich nicht. Man wird sich davon überführen, wenn man bemerkt, daß wenn die Linie GO, perpendicular auf KH ist, nicht G′O′ die perpendicular auf K′H′, begegnen wird, weil die eine sich in der Ebene GLKH und die andre sich in der Ebene G′L′K′H′ befindet, und weil sie nicht durch denselben Punct des gemeinschaftlichen Durchschnitts KH dieser Ebenen gehen. Die Reihe der absoluten Mittelpuncte der Krümmung O, O′... wird also nicht eine von den Entwickelten der vorgegebenen Curve seyn. Wir wollen durch analytisches Verfahren, die Resultate beweisen, die wir aus den vorhergehenden geometrischen Betrachtungen gezogen haben.

353.

Es seyn x, y, z, die Coordinaten des Mittelpuncts einer Kugel; x′, y′, z′, die, eines Punctes ihrer Oberfläche und a ihr Radius; man wird haben

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=u.$$

Es sind vier Bedingungen erforderlich um die Größen x, y, z und u zu bestimmen die, welche sich zuerst darbieten bestehen darin, die vorgegebene Kugel durch vier conse-

be-

die mit der Oberfläche HH′H″H‴... K‴K″K′K Beziehungen haben wird, analog mit denjenigen, die eine Developpirende mit ihrer Entwickelten hat.

cutiven Puncte der gegebenen Curve gehen zu lassen; dieses setzt voraus, daß der Radius u unverändert bleibt, obgleich die Coordinaten x', y' und z', sich dreymal nach einander verändern; man wird also zu gleicher Zeit

$$du = 0, \quad d^2u = 0, \quad d^3u = 0 \text{ haben.}$$

Wenn man diese Gleichungen entwickelt, so wird man auf die, welche wir in Nr. 350 durch (a), (b) und (c) bezeichnet haben, zurückfallen. Bestimmt man durch diese Gleichungen $(x-x')$, $(y-y')$ und $(z-z')$, und substituirt man im Ausdruck von u die gefundenen Werthe, so wird man den Radius der Osculirungssphäre, haben.

Betrachtet man nur drey consecutive Puncte, so wird man nur die Gleichungen

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = u$$
$$du = 0, \quad d^2u = 0 \text{ haben.}$$

Bestimmt man nachher $(x-x')$ und $(y-y')$ in $(z-z')$ durch die zwey letzten, und substituirt man nachher im Ausdruck von u, so wird das Resultat alle, zu einerley Punct relative Krümmungshalbmesser ausdrücken. Um den absoluten Krümmungshalbmesser zu erhalten, müßte man z verändern lassen, und unter allen Werthen von $z-z'$, denjenigen suchen, der das Minimum von u giebt. Man kann auch durch die Betrachtung, daß der absolute Mittelpunct der Krümmung, sich in der Osculirungsebene befinder zu demselben Ziele gelangen, und dieses ist der Weg den wir folgen wollen.

Wenn die Gleichungen $du=0$ und $d^2u=0$ entwickelt sind, so geben sie

$$(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0$$
$$(x-x')d^2x'+(y-y')d^2y'+(z-z')d^2z'-dx'^2-dy'^2-dz'^2=0;$$

macht man zur Verkürzung $dx'^2+dy'^2+dz'^2=ds'^2$, so zieht man daraus

$(x-x')$

$$(x-x')(dx'd^2y'-dy'd^2x')+(z-z')(dz'd^2y'-dy'd^2z')$$
$$+ds'^2dy'=0$$
$$(y-y')(dx'd^2y'-dy'd^2x')+(z-z')(dx'd^2z'-dz'd^2x')$$
$$-ds'^2dx'=0;$$

aber durch die Gleichuug der Osculirungsebene, die in Nr 349 gegeben ist, hat man

$$dx'd^2y' - dy'd^2x' = C, \qquad dz'd^2x' - dx'd^2z' = B,$$
$$dy'd^2z' - dz'd^2y' = A;$$

die vorhergehenden Gleichungen können also folgender Gestalt geschrieben werden:

$$-A(z-z')+C(x-x')+ds'^2dy'=0 \ldots (d)$$
$$-B(z-z')+C(y-y')-ds'^2dx'=0 \ldots (c);$$

verbindet man diese Gleichungen mit die, der Osculirungsebene

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

so wird kommen

$$(A^2+B^2+C^2)\ (z-z')-Ads'^2dy'+Bds'^2dx'=0,$$

woraus

$$z-z'=\frac{ds'^2(Ady'-Bdx')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Setzt man im Ausdruck von u^2, an der Stelle von $x-x'$ und $y-y'$ die Werthe

$$\frac{A(z-z')-ds'^2dy'}{C} \text{ und } \frac{B(z-z')+ds'^2dx}{C},$$

welche die beyde Gleichungen (d) und (e) geben, und macht man $ds'^2dy'=E$, $ds'^2dx'=F$, so wird kommen

$$C^2u^2=(A^2+B^2+C^2)\ (z-z')^2-2(z-z')\ (AE-BF)+E^2+F^2;$$

setzt man an der Stelle von $z-z'$ den oben gefundenen Werth, so wird man haben

$$C^2u^2=\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2} - 2\,\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2} + E^2 + F^2$$

oder wenn man alles zu einerley Nenner bringt

$$C^2u^2 = \frac{-(AE-BF)^2+(E^2+F^2)(A^2+B^2+C^2)}{A^2+B^2+C^2}.$$

Entwickelt man dieses Resultat, so wird man sehen daß es sich unter der Gestalt

$$C^2u^2 = \frac{(AF+BE)^2+C^2(E^2+F^2)}{A^2+B^2+C^2}$$

setzen kann, aber

$$AF+BE=-dz'ds^2(dx'd^2y'-dy'd^2x')=-Cdz'ds'^2; \text{ also}$$

$$u^2 = \frac{E^2+F^2+dz'^2\,ds'^4}{A^2+B^2+C^2}:$$

Setzt man nachher an der Stelle von A, B, C, E und F, ihre Werthe so wird man finden

$$u^2 = \frac{ds'^6}{(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2+(dz'd^2x'-dx'd^2z')^2+(dx'd^2y'-dyd^2x')^2}.$$

Dieser Ausdruck des absoluten Krümmungshalbmesser einer Curve von doppelter Krümmung, ist auch der, den wir in Nr. 326, für den Krümmungshalbmesser einer Section gesehen haben, welche durch eine beliebige Ebene in einer krummen Oberfläche gemacht ist. Die Osculirungsebene ist in diesem Falle dieselbe als die schneidende Ebene, und ihre Gleichung, mit die der vorgegebenen Oberfläche verbunden, giebt die Gleichungen der Projectionen der Section. Wenn man die Differentialcoefficienten der Ordinate der vorgegebenen Oberfläche einführen wollte, so müßte man bemerken, daß, da die Differentialgleichungen der Ebene, und die, der Oberfläche, zu gleicher Zeit statt finden müssen, so kann man höchstens nur ein Differential als beständig ansehen. Setzt man mehrerer Symmetrie wegen, voraus, daß man sie alle zu gleicher Zeit verändern läßt, so wird man haben

$$dz'=pdx'+qdy',\quad d^2z'=rdx'^2+2sdx'dy'+tdy'^2+pd^2x'+qd^2y'$$

Adx'

$Adx'+Bdy'+Cdz'=0, \quad Ad^2x'+Bd^2y'+Cd^2z'=0;$
vermittelst dieser Gleichungen wird man die Differentiale verschwinden lassen, und der Werth von u wird nur nach den Größen A,B,C,p,q,r,s und t abhangen. Ich werde diese Rechnungen hier nicht machen, weil sie keine andre Schwierigkeit als die ihrer Länge, haben.

354.

Wir wollen wieder die Gleichung $z-z'=\frac{AE-BF}{A^2+B^2+C^2}$ (vorhergehende Nr.) vornehmen, und im Zähler der zweyten Hälfte, an die Stelle der Größen A,B,E,F, ihre Werthe setzen, so werden wir haben

$$z-z'=\frac{ds'^2dy(dy'd^2z'-dz'd^2y')-ds'^2dx'(dz'd^2x'-dx'd^2z')}{A^2+B^2+C^2}$$

aber $dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z'=\frac{1}{2}d.ds'^2=ds'd^2s'$; also

$$z-z'=\frac{ds'^3(ds'd^2z'-dz'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Wenn die Gleichungen $du=0$, $d^2u=0$, so wie die der Osculirungsebene, in Beziehung auf den Größen x', y', z', und ihre Differentiale symmetrisch sind, so wird man unmittelbar daraus Werthe von $y-y'$ und von $x-x'$, welche denen so man für $z-z'$ gefunden hat ähnlich sind, ziehen, und haben

$$y-y'=\frac{ds'^3(ds'd^2y'-dy'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}$$

$$x-x'=\frac{ds'^3(ds'd^2x'-dx'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Man kann diesen Ausdrücken und dem von u eine sehr elegante Gestalt geben, indem man bemerkt, daß wenn ihr Nenner $A^2+B^2+C^2$ entwickelt ist, er

dy'^2

$$dy'^2d^2z'^2-2dy'dz'd^2y'd^2z'+dz'^2d^2y'^2$$
$$+dz'^2d^2x'^2-2dx'dz'd^2x'd^2z'+dx'^2d^2z'^2$$
$$+dx'^2d^2y'^2-2dx'dy'd^2x'd^2y'+dy'^2d^2x'^2,$$

wird, und man ihm folgender Gestalt schreiben kann;

$$(dz'^2+dx'^2)d^2y'^2-2dy'dz'd^2y'd^2z'$$
$$+(dy'^2+dx'^2)d^2z'^2-2dx'dz'd^2x'd^2z'$$
$$+(dz'^2+dy'^2)d^2x'^2-2dx'dy'd^2x'd^2y';$$ weil aber

$$dz'^2+dx'^2=ds'^2-dy'^2,\quad dy'^2+dx'^2=ds'^2-dz'^2,$$
$$dz'^2+dy'^2=ds'^2-dx'^2,$$

so wird man haben

$$ds'^2(d^2y'^2+d^2z'^2+d^2x'^2)-\left\{\begin{matrix}dy'^2d^2y'^2+2dy'dz'd^2y'd^2z'\\ dz'^2d^2z'^2+2dx'dz'd^2x'd^2z'\\ dx'^2d^2x'^2+2dx'dy'd^2x'd^2y'\end{matrix}\right\}$$

ein Resultat dessen zweyter Theil nichts anders als das Quadrat von $dy'd^2y'+dz'd^2z'+dx'd^2x'$ oder von $ds'd^2s'$, negativ genommen, ist. Dieses Resultat wird sich also zu $ds'^2(d^2y'^2+d^2x'^2+d^2z'^2-d^2s'^2)$ reduciren; im Werthe von u gesetzt wird dieser zweyte Theil in

$$u=\frac{ds'^4}{d^2y'^2+d^2x'^2+d^2z'^2-d^2s'^2}$$

verwandelt; wenn man überdem bemerkt, daß

$$ds'd^2z'-dz'd^2s'=ds'^2d.\frac{dz'}{ds'}$$

$$ds'd^2y'-dy'd^2s'=ds'^2d.\frac{dy'}{ds'}$$

$$ds'd^2x'-dx'd^2s'=ds'^2d.\frac{dx'}{ds'},$$

so wird man finden

$$z-z'=\frac{ds^3d.\frac{dz'}{ds'}}{d^2z'^2+d^2y'^2+d^2x'^2-dy'^2}$$

$$y - y' = \frac{ds'^3 d . \frac{dy'}{ds'}}{d^2z'^2 + d^2y'^2 + d^2x'^2 - d^2s'^2}$$

$$x - x' = \frac{ds'^3 d . \frac{dx'}{ds'}}{d^2z'^2 + d^2y'^2 + d^2x'^2 - d^2s'^2}.$$

Wenn man von diesen Werthen Gebrauch machen will, so wird es gut seyn ein Differential als beständig zu nehmen, obgleich dieses nicht unumgänglich nöthig ist (Nr. 74). Wenn man von diesen Ausdrücken die veränderlichen Größen x', y' und ihre Differentiale verjagt haben wird, so wird z' verschwinden, und nur die veränderliche Größe z' übrig bleiben, deren Eliminirung zu zwey Gleichungen führen wird, die der Curve, auf welcher sich alle Mittelpuncte der Krümmung befinden, gehören werden.

355.

Die folgende Rechnung, wird die Bemerkung bekräftigen, die wir in Nr. 352 in Rücksicht auf dieser Curve gemacht haben, und uns beweisen, daß sie nur in dem Falle eine Entwickelte seyn kann, wo die vorgegebene Curve eben ist.

Wir wollen zur Verkürzung

$$ds'd^2x' - dx'd^2s' = \alpha, \quad ds'd^2y' - dy'd^2s' = \beta,$$
$$ds'd^2z' - dz'd^2s' = \gamma$$

machen, und von den Gleichungen hier oben die Größe

$\frac{ds'^3}{dz'^2 + d^2y'^2 + dx'^2 - d^2s'^2}$, die ihnen gemeinschaftlich ist,

zu eliminiren, so wird kommen

$$(y-y')\gamma = (z-z')\beta, \qquad (x-x')\gamma = (z-z')\alpha,$$

Gleichungen, welche die vom absoluten Krümmungshalbmesser sind. Betrachtet man die Coordinaten x, y und z

als

als die, des Durchschnittspunctes zweyer consecutiven Krümmungshalbmesser, so müssen diese Größen beständig bleiben, wenn x', y' und z' sich einmal verändern, und folglich die Gleichuugen

$$(y-y')d\gamma - \gamma dy' = (z-z')d\beta - \beta dz'$$
$$(x-x')d\gamma - \gamma dx' = (z-z')d\alpha - \alpha dz'$$

zu derselben Zeit als die vorhergehenden statt finden, verjagt man $x-x'$, $y-y'$ und $z-z'$ zwischen diesen vier Gleichungen, so wird man die Bedingungsgleichung bekommen, welche statt haben muß, damit sich diese beyde consecutive Krümmungshalbmesser schneiden: diese Gleichung wird seyn

$$(\gamma dy' - \beta dz')(\alpha d\gamma - \gamma d\alpha) - (\gamma dx' - \alpha dz')(\beta d\gamma - \gamma d\beta) = 0.$$

Verrichtet man die angezeigten Multiplicationen, und verrichtet man die sich nachher darbietenden Reductionen, so wird man ein Resultat finden, das folgender Gestalt geschrieben werden kann:

$$d\alpha(\beta dz' - \gamma dy') + d\beta(\gamma dx' - \alpha dz') + d\gamma(\alpha dy' - \beta dx') = 0;$$

setzt man an der Stelle von α, β und γ die Größen welche sie vorstellen, so wird man sogleich haben

$$d\alpha = ds'd^3x' - dx'd^3s', \quad \beta dz' - \gamma dy' = ds'(dz'd^2y' - dy'd^2z')$$
$$d\beta = ds'd^3y' - dy'd^3s', \quad \gamma dx' - \alpha dz' = ds'(dx'd^2z' - dz'd^2x')$$
$$d\gamma = ds'd^3z' - dz'd^3s', \quad \alpha dy' - \beta dx' = ds'(dy'd^2x' - dx'd^2y');$$

substituirt man diese Werthe und vernachläßigt man die gemeinschaftlichen Factoren, so werden wir finden, daß die Gleichung hier oben zur Entwickelung

$$\left.\begin{matrix} dz'd^2x'd^3y' - dz'd^2y'd^3x' + dy'd^2z'd^3x' \\ - dy'd^2x'd^3z' + dx'd^2y'd^3z' - dx'd^2z'd^3y' \end{matrix}\right\} = 0 \text{ hat,}$$

und daß sie folglich dieselbe ist, als die, welche man bekommen würde, wenn man sucht, ob die Osculirungsebene durch vier consecutiven Puncte gehen kann; denn diese letzte würde aus der Eliminirung der Größen $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ zwi-

schen den 3 Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} Adx' + Bdy' + Cdz' = 0 \\ Ad^2x' + Bd^2y' + Cd^2z' = 0 \\ Ad^3x' + Bd^3y' + Cd^3z' = 0 \end{array}\right\}$$ hervorgehen.

356.

Um zu den Gleichungen einer Entwickelten zu gelangen, werden wir bemerken, daß die Gleichungen $du = 0$, $d^2u = 0$, die Relation enthalten, welche zwischen den Größen x, y und z für alle Mittelpuncte statt finden soll, und daß der allgemeine Caracter derjenigen, die sich auf einerley Entwickelten befinden, darinn besteht, daß die aus einer jeden von ihnen geführte Radii zum correspondirenden Punct der vorgegebenen Curve bey dieser Entwickelten, tangentirend sind. Nennt man X, Y und Z, die Coordinaten der beliebigen Puncte des Raums, und läßt man immer x, y und z an den Mittelpunct der Krümmung haften, so werden die Gleichungen der Tangente mit der Curve, die davon eine Reihe vereinigt,

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z) \text{ seyn.}$$

und da diese grade Linie durch den Punct der vorgegebenen Curve gehen muß, deren Coordinaten x', y' und z' sind, so werden daraus die folgende Gleichungen entstehen:

$$x - x' = \frac{dx}{dz}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy}{dz}(z - z').$$

Es ist hinreichend eine dieser Gleichungen mit der Gleichung $du = 0$ zu verbinden, um die Tangente der Entwickelten zu bestimmen, weil die Gleichung $du = 0$, selbst die der Berührungsebene der entwickelbaren Oberfläche ist, welche durch die successiven Durchschnitte der Normalebenen gebildet ist, und auf welcher sich die Entwickelten befinden.

Nur

Nur vermittelst des Integralcalculs kann man von der Gleichung der Tangente einer Curve, zu der Gleichung dieser Curve selbst, übergehen. Wir sind also genöthigt, hier einzuhalten.

357.

Wir wollen diese Theorie der Curven von doppelter Krümmung mit der Bemerkung beschließen, daß sie zwey Arten von Inflexionen fähig sind; die erste hat Beziehung auf die Curve der entwickelbaren Oberfläche die das Ensembel ihrer Tangenten bildet, und statt findet, wenn der Krümmungshalbmesser dieser Oberfläche vom positiven zum negativen, und umgekehrt übergeht.*)

Die zweyte Art von Inflexionen der Curven von doppelter Krümmung entspricht dem Fall wo ihr absoluter Krümmungshalbmesser das Zeichen verändert. Diese Materie erfordert einige Details, um mit Genauigkeit und Deutlichkeit behandelt zu werden, worinn ich mich jetzt nicht einlassen kann. Es ist hinreichend dem Leser den Weg zu diesen Untersuchungen gezeigt zu haben, deren Anwendung überdem nicht häufig ist.

*) Die Inflexionen der Oberflächen sind durch die Veränderung der Zeichen ihrer Radii von größter und kleinster Krümmung, zu erkennen; und die Lage der Mittelpuncten dieser Krümmungen zeigt uns, auf welcher Seite sich die Concavität der vorgegebenen Oberfläche, befinden.

Aus-

Auszug des Berichtes,

welcher der physisch-mathematischen Classe des National-instituts der Wissenschaften und Künste abgestattet ist.

Der B. Lacroix, Professor der Mathematik an den Centralschulen, hat dem Institut den Entwurf eines neuen Lehrbegriffs des Integral- und Differentialcalculs, mit einer Einleitung und den vier ersten schon gedruckten Capiteln dieses Werkes vorgelegt. Der B. Laplace und ich haben den Auftrag erhalten, der Classe der physisch-mathematischen Wissenschaften Bericht über diese Schrift abzustatten.

Seit langer Zeit dienen Eulers Schriften über den Integral- und Differentialcalcul denen zu Führern, welche das Studium der Analysis ergründen wollen, aber diese über alles Lob erhabenen Werke fangen an, sehr selten zu werden. Die später gemachten Entdeckungen haben einige Theorien beträchtlich vervollkommnet, ja selbst neue hervorgebracht. Auf der andern Seite sind die einzelne Werke und die akademische Sammlungen, worin diese Entdeckungen enthalten sind, nicht immer denen zur Hand, welche das größte Interesse und die größte Lust haben, sie zu Rathe zu ziehen. Dies sind die Gründe, welche den B. Lacroix vermochten, in einem einzigen Werke nicht allein den Kern der erwähnten Eulerschen, sondern auch der besten andern über diesen Gegenstand erschienenen Schriften zu vereinigen.

Schwere Theorien mit Klarheit darzustellen, sie mit andern schon bekannten Theorien zu verbinden, einige derselben von dem systematischen oder irrigen Theile zu befreyen, durch welchen sie vielleicht bey ihrer Entstehung verdunkelt sind, über das Ganze einen Grad von Licht und der Bestimmtheit zu verbreiten, mit einem Worte: ein elementarisches und der jetzigen Höhe der Wissenschaft angemessenes Werke zu liefern, dies ist das Ziel, welches Lacroix sich vor Augen setzte, und das er nicht erreichen konnte, ohne sich in tiefe Untersuchungen einzulassen, und oft neben den

Er-

Erfindern zu gehen. Der allgemeine Entwurf des Werks ist in der Classe vorgelesen worden, und unsre Collegen haben sich einen Begriff davon verschaffen können. Wir begnügen uns zu sagen, daß der Verfasser ein zu einem Ganzen vereinigte Menge Methoden und Theorien darstellt, deren mehrere noch in kein Werk dieser Art erschienen sind.

. . . .

. . . .

Das Resultat unsrer Prüfung ist, daß Lacroixs Werk, dessen Gegenstand eben so wichtig, als seine Ausführung schwer ist, alles zusammenfasse, was in dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft, zu einem vollständigen Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculs gehört. Dürfen wir auch aus der uns vorgelegten Einleitung und den vier ersten Capiteln, von denen wir so eben Bericht abgestattet haben, auf das Ganze schließen, so wird dieses Werk durch die Wahl der Methoden, durch ihre Allgemeinheit und die Strenge ihrer Beweise sich vor andern Schriften dieser Gattung auszeichnen.

Wir hoffen dem zufolge, daß das Nationalinstitut durch seinen Beyfall den Eifer und die Talente des B. Lacroix belohnen und aufmuntern muß, da wir so eben einen neuen Beweis von denselben erhalten, und da dieselben schon bey der ehemaligen Akademie der Wissenschaften durch mehrere bekannte Memoires rühmlich bekannt waren, worunter sich besonders seine Sonnentafeln, und eine Abhandlung über die Theorie der See-Assecuranzen welche den Preis erhielt, auszeichnen.

Gegeben im Nationalinstitut den 11 Nivose, V. Jul.

Unterzeichnet

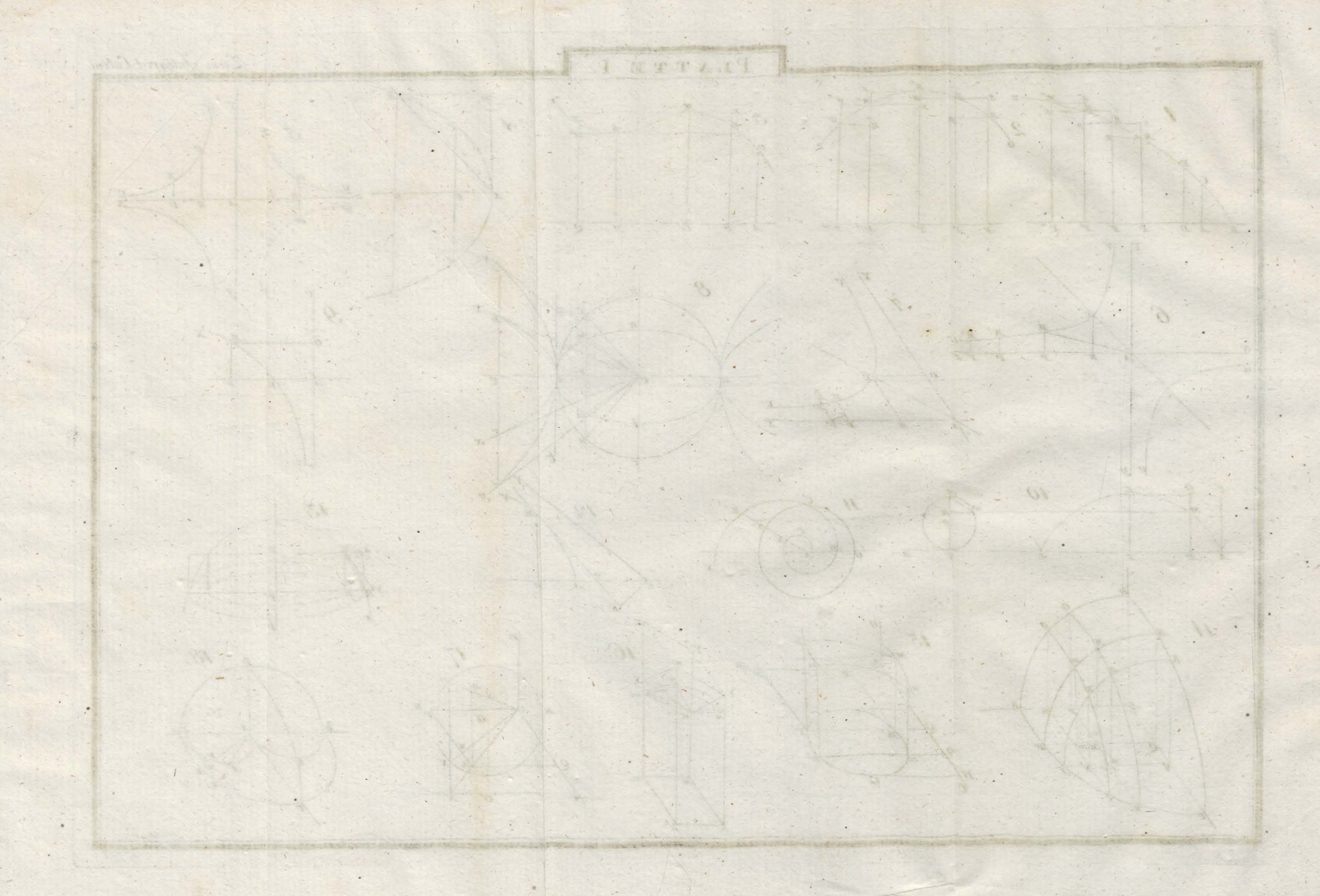
Laplace und Legendre.

Die Classe genehmigt den Bericht und die Vorschläge.



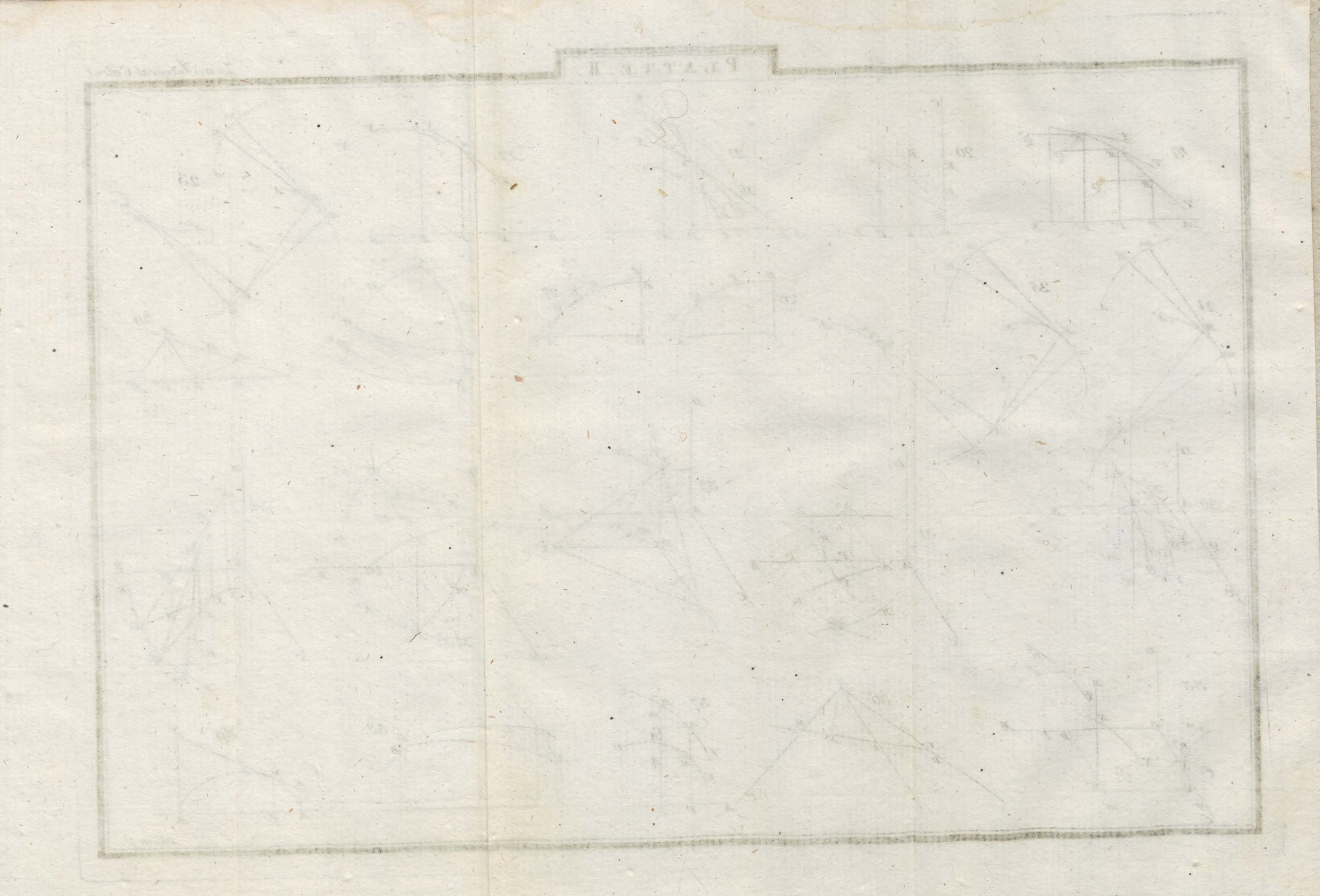
PLATTE I.

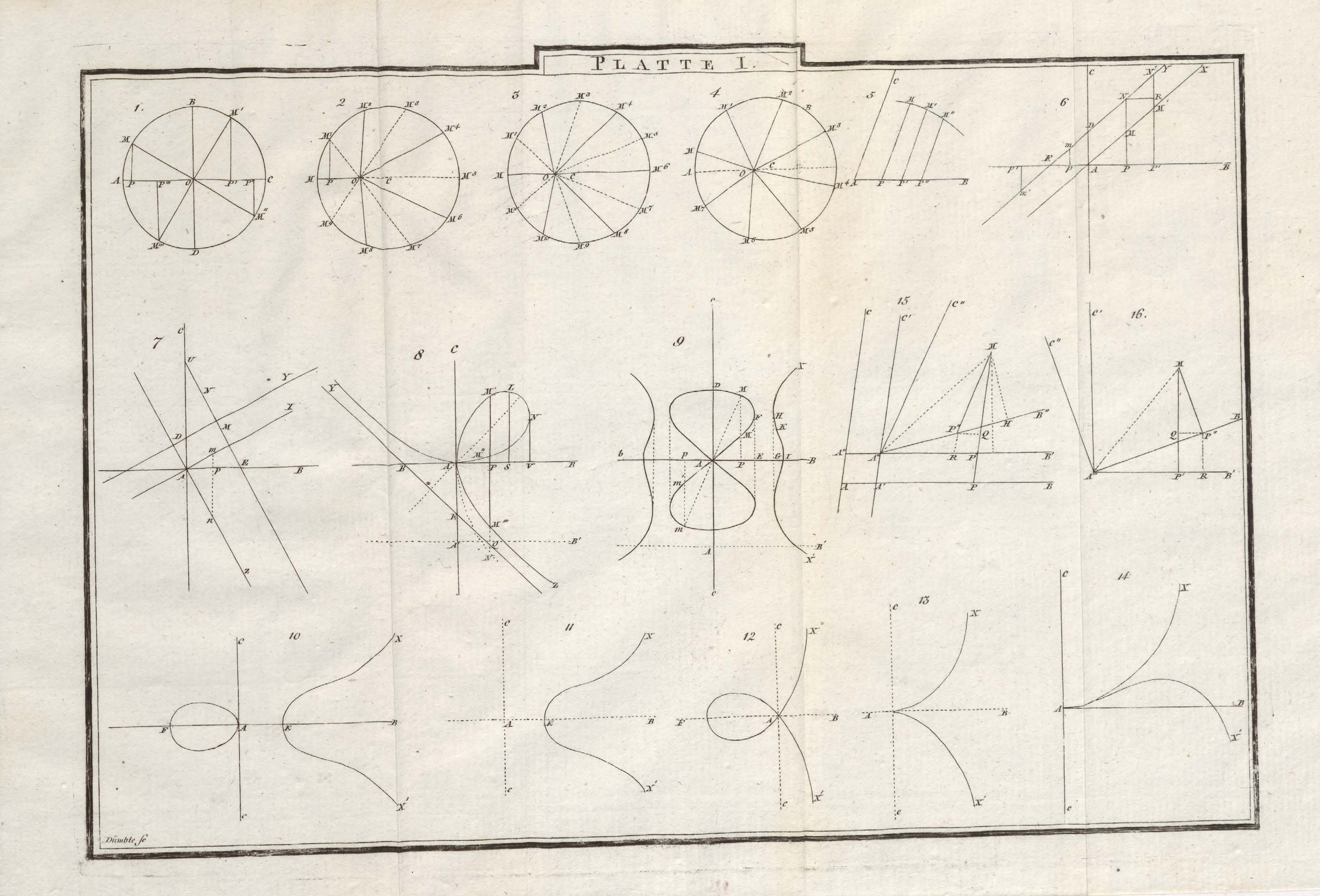
Dumbte sc.

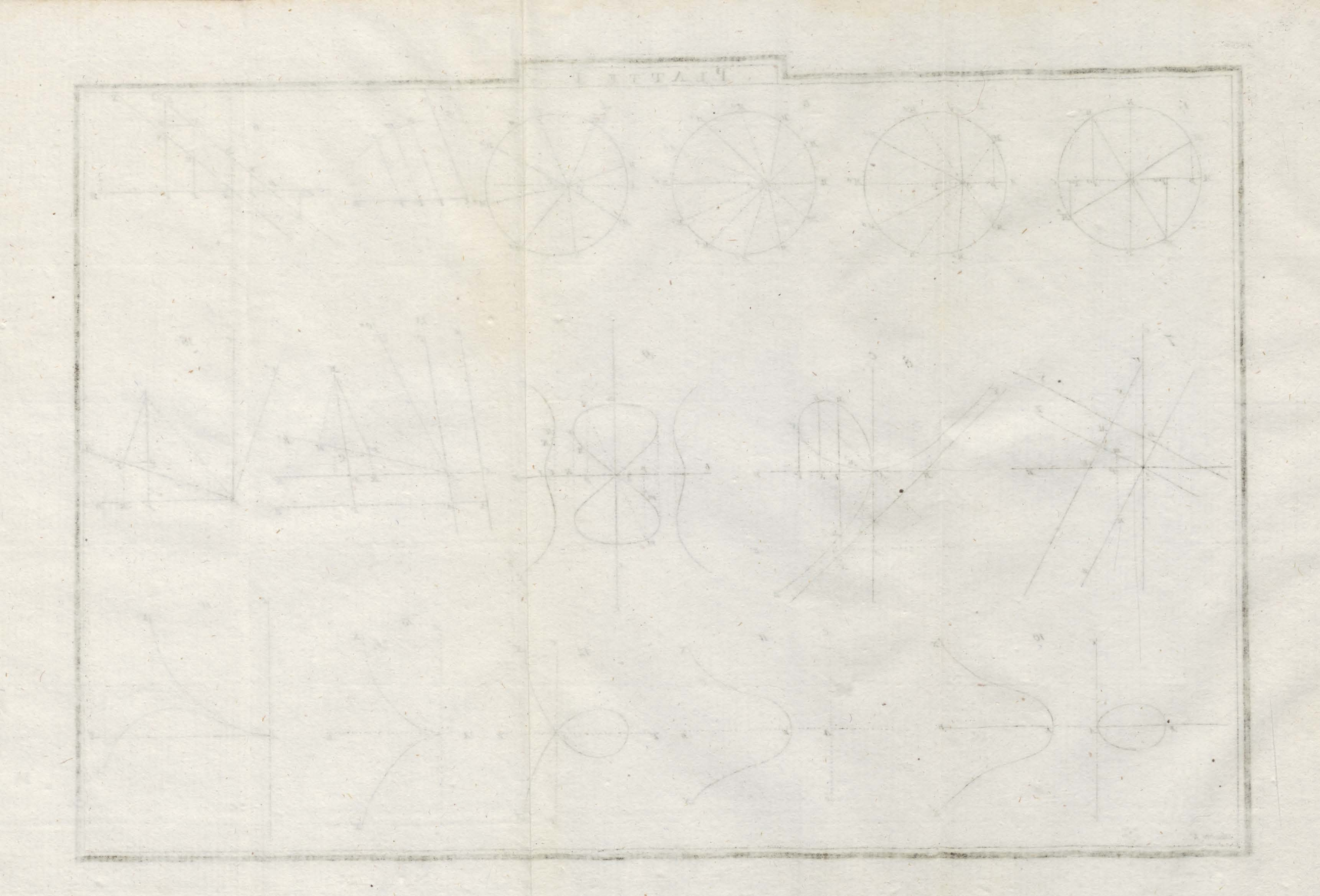


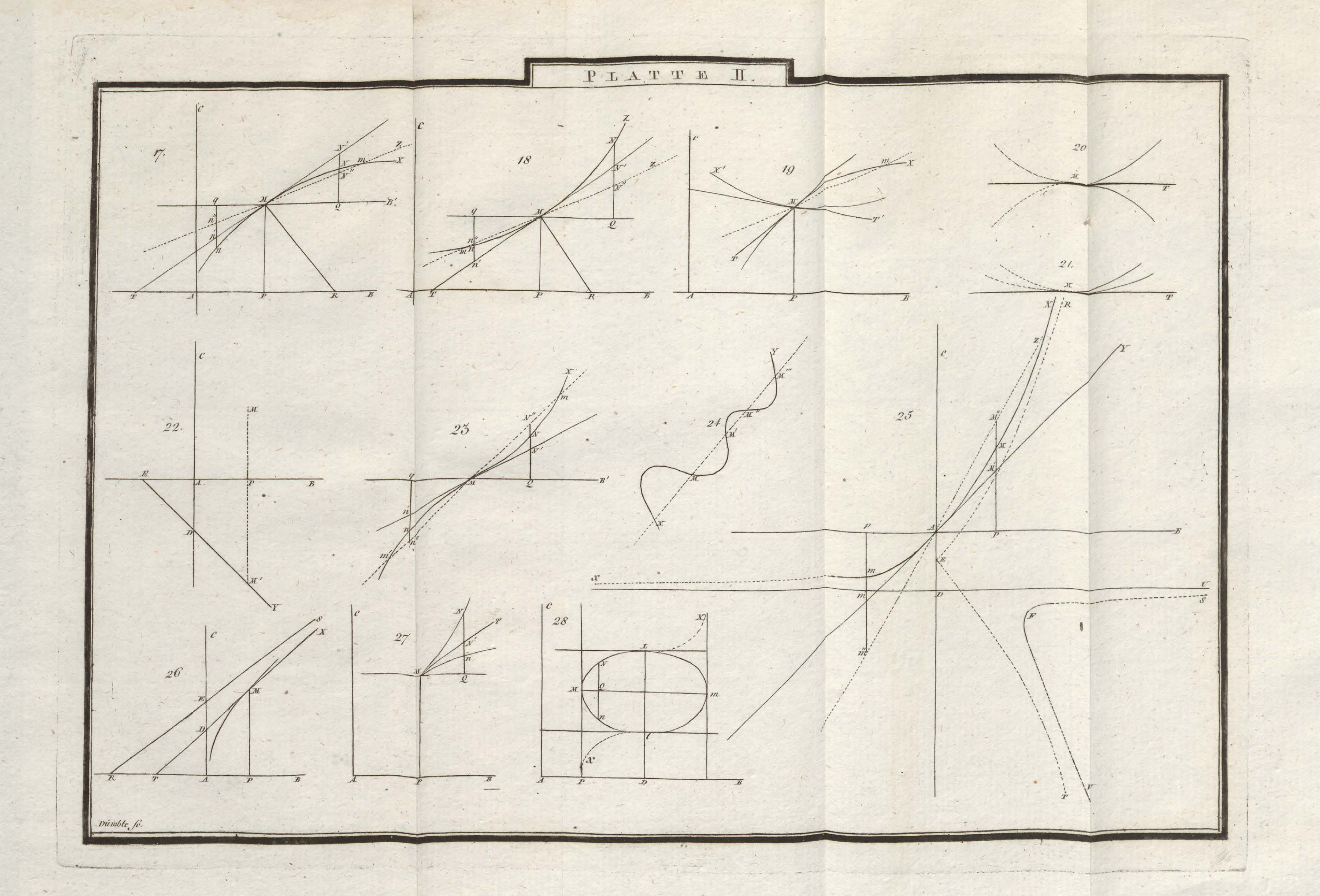
PLATTE. II.

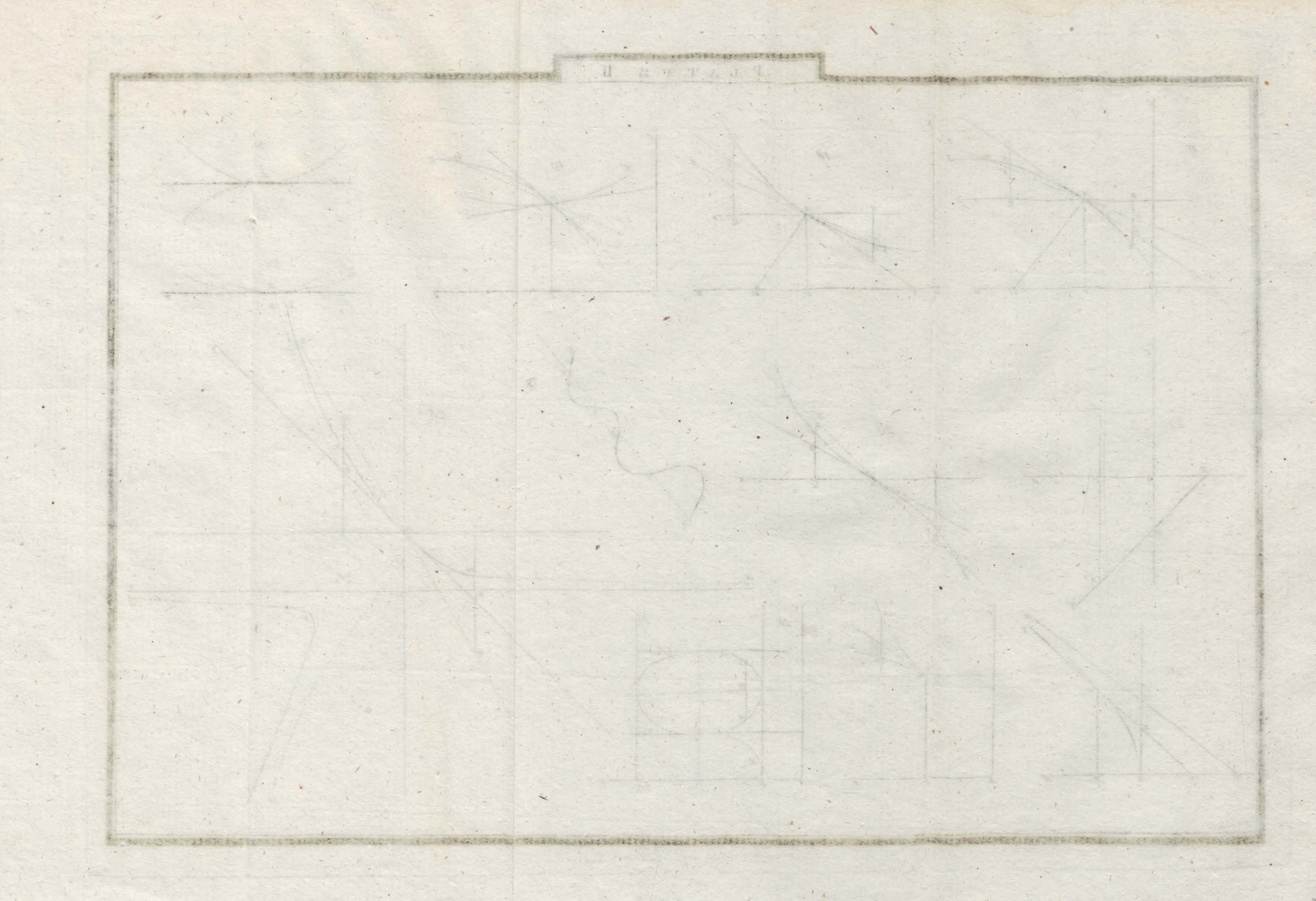
Dümbte sc.

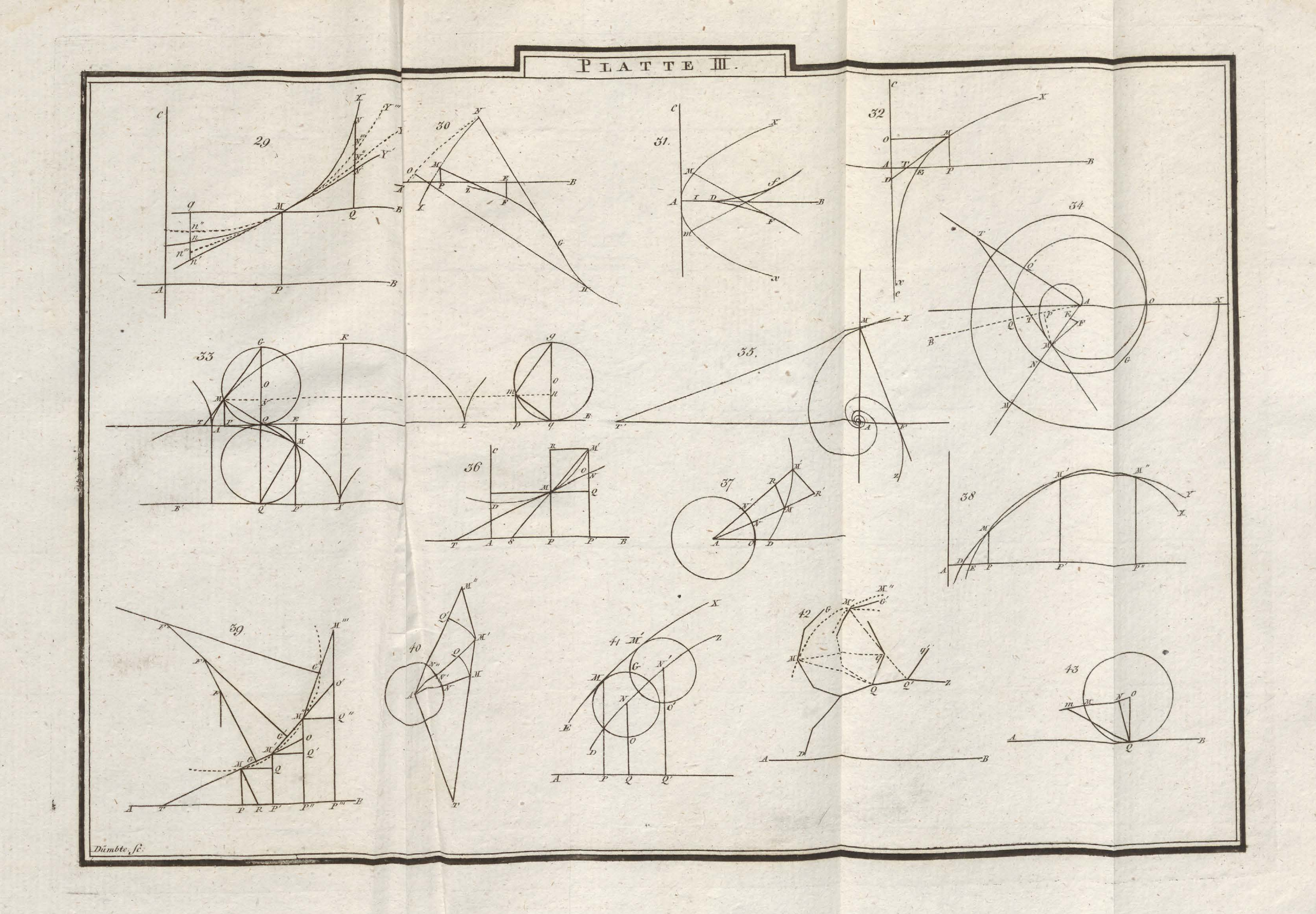


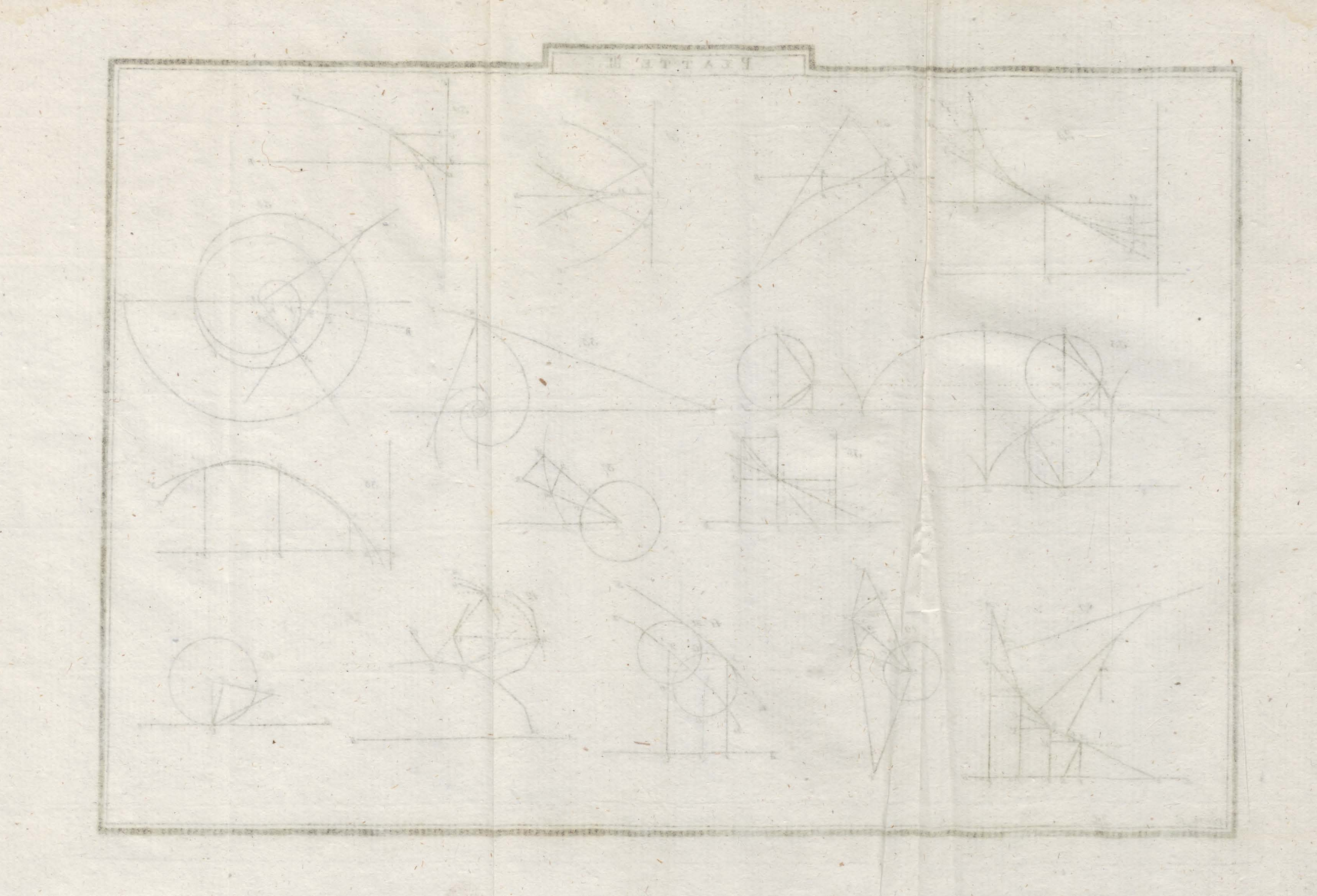

Platte I.
Dumbte sc




PLATTE II.
Dumble sc.




PLATTE III.
Dümbte sc.



PLATTE IV

